નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો.

કૃષ્ણાજી

[illegible]

Department of Public Instruction, Bombay

NEW GEOMETRY

PART 1.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,
First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchndra Janardan Gokhale, B. A.,
Teacher, Training College for men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S. T. C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B. A., S. T. C.,
H. M., P. R. Training College, Ahmedabad.

6TH EDITION. 15,000 COPIES.

PUBLISHED BY

Karsandas Narandas & Sons,
BOOKSELLERS & PUBLISHERS, SURAT.

1925.

PRINTED BY
VAJERAM MANSING AT THE "SURAT CITY" PRINTING PRESS,
NEAR CHOUTA BRIDGE, SURAT.

AND

PUBLISHED BY
BALUBHAI KARSANDAS
OF MESSRS. KARSANDAS NARANDAS & SONS,
BOOK-SELLERS & PUBLISHERS, NANAVAT, SURAT.

મુંબઈ ઇલાકાનું સરકારી કેળવણી ખાતું.

નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો

મૂળ લેખક,

બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલટકર, એલ્. એજી.,

ફર્સ્ટ આ. ડે. એ. ઇન્સ્પેકટર, નાસિક,

અને

રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,

શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફોર મેન, પુના.

અનુવાદક,

ગણેશ બચાજી સપ્રે, બી. એ., એસ. ટી. સી.,

અને

મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી. એ., એસ. ટી. સી.,

હે. મા. પ્રેમચંદ રાયચંદ ટ્રેનિંગ કોલેજ, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ છઠ્ઠી   પ્રત-૧૫,૦૦૦.   સને ૧૯૨૫.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,

કરસનદાસ નારણદાસ એન્ડ સન્સ,

નાણાવટ, સુરત.

સુરત ચૌટાના પૂલ ઉપર આવેલા “ સુરત સિટિ ” પ્રિન્ટિંગ
પ્રેસમાં વજેરામ માનસિંહે છાપ્યું.

પ્રસ્તાવના.

ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં '**નવી ભૂમિતિ**'* શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી ગ્રંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક ગ્રંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ ગોડ્ફ્રે અને સિડન્સ, બર્નાડ અને ચાઇલ્ડ, પિયરપોઇંટ, એગર, વગેરે ગ્રંથકારોના અંગ્રેજી ગ્રંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ઘણી ઉપયોગી થઇ પડી છે. આ માટે આ સર્વે ગ્રંથકારોના પ્રસ્તુત ગ્રંથકાર ઘણા આભારી છે.

ગ્રંથકર્તા.

---

*નવી ભૂમિતિ—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અમુક ગણિત-શાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ઘણા વખત પહેલાં દાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પર દાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ દાખલ કરી છે.

શિક્ષકોને સૂચના.

જે શિક્ષકોને આ વિષય છેક નવો છે, તેમણે આગળ આવતા ઉપોદ્‌ઘાતમાં આપેલી નવી ભૂમિતિ સંબંધી માહીતી ધ્યાન દઈને વાંચવી, અને તે યાદ રાખી આ વિષય શીખવવો. શીખવતી વખતે નીચેની બાબતો હંમેશાં ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આકૃતિના ધર્મો અનુમાનદ્વારા શીખવતા પહેલાં છોકરાઓ પાસે આકૃતિ કઢાવીને અને તેની બાજુઓ, ખુણા, વગેરે મપાવીને તે ધર્મો પ્રત્યક્ષ જોવરાવવાની જરૂર છે; તેથી ૯થી ૧૧૫ સુધીનાં પાનાંમાંનો પ્રાયોગિક ભાગ કાળજીપૂર્વક શીખવવો જોઈએ.

(૨) આકૃતિઓ સંબંધી અથવા પ્રમેયો સંબંધી પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કર્યા પછી, જે ધર્મો છોકરા પાસે કઢાવ્યા હોય,.તે તેમને નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવા કહેવું.

(૩) આકૃતિઓના ધર્મ અથવા પ્રમેયો બરાબર સમજવા માટે આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે; માટે ભૂમિતિ શીખવતી વખતે શિક્ષકે આકૃતિઓ પાટીઆ પર બરાબર કાઢવી. તેમજ જે આકૃતિઓ છોકરાઓએ કાઢવાની હોય, તે પણ તેમની પાસે સાધનોની મદદથી ભૂલ ન થાય એવી રીતે કઢાવવી. આકૃતિ બરાબર કાઢેલી હોય તો પ્રમેય વધારે સહેલાઈથી સમજી શકાય.

(૪) સર્વ વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવવાને બદલે જેમ જેમ તેમની જરૂર જણાય તેમ તેમ તે એક પછી એક શીખવવી. વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવી હોય તો તેમનો ખપ પડતા સુધીમાં તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે; તેથી આ યોજના જરૂરની છે.

(૫) વ્યાખ્યાઓ છોકરાઓને કહી દેવી નહિ, પણ ચોપડીમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પ્રયોગ કરી છોકરાઓ પાસે તે કઢાવવી. વ્યાખ્યા

છોકરાઓ પાસે કઢાવવી શક્ય ન હોય તો તે જુદી જુદી આકૃતિઓની મદદથી છોકરાઓને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવવી. છોકરાઓને વ્યાખ્યાઓની સમજણ પડ્યા પછી તેમને લગતી આકૃતિઓ તેમની પાસે કઢાવવી તથા ઓળખાવવી.

(૬) જે પ્રમેયો વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાનાં હોય છે, તેમની સત્યતા જોકે પહેલાં પ્રાયોગિક ભાગ શીખવતી વખતેજ તેમના ધ્યાનમાં આવી ગઈ હોય છે, તોપણ તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે. તેથી દરેક પ્રમેય શીખવતા પહેલાં તેની સત્યતાનો અનુભવ (પહેલાં એક વખતે તેમણે કર્યો હતો તેમ) પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી ફરી કરાવવો, અને તેનો અનુભવ કરાવ્યા પછી "હવે એજ બાબત આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ" એમ કહી અનુમાનની મદદથી સિદ્ધતા શરૂ કરવી.

અનુક્રમણિકા.

શુદ્ધિપત્ર

પૃષ્ઠ	લીટી	અશુદ્ધ	શુદ્ધ
૪૭		આકૃતિ ૨	
		अ—	**अ—ड**
૫૫		આકૃતિ	
		अ—	**अ—ब**
૧૪૭	૨	**अड ॥ बक**	**अड=बक**
૧૫૩		આકૃતિ ૧	
-		**ब—क**	**ब—ई—क**
૧૭૩	૭	દુભગાય	દુભાગાય
૧૮૪	છેલ્લી	દુભાગવા	દુભાગવો.

ઉપોદ્‌ઘાત.

નવી ભૂમિતિનાં ખાસ લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છેઃ—

(૧) આકૃતિના ધર્મ (પ્રમેય-સિદ્ધાંત) અનુમાનથી સિદ્ધ કરતા પહેલાં પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ ઉપરથી તેમની સત્યતાની ખાતરી કરી આપવામાં આવી છે.

(૨) વ્યાખ્યા અને પ્રમેય-સિદ્ધાંત (પ્રમેયમાંના સામાન્ય નિયમો) વિગમનપદ્ધતિથી (વિશેષ દૃષ્ટાંતો પરથી સામાન્ય નિયમ ઉપર ઉતરવાની રીતથી) શીખવવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે.

(૩) સિદ્ધાંતોનો ક્રમ યુક્લિડથી સહેજ જુદો છે; કેટલેક ઠેકાણે સિદ્ધતા પણ જુદી રીતે આપી છે; અને યુક્લિડમાંના કેટલાક બહુ જરૂરના ન હોય એવા સિદ્ધાંતો કાઢી નાખ્યા છે.

(૪) આકૃતિઓ બરાબર દોરવી ઘણી અવશ્યની ગણી છે.

આ ફેરફાર કરવાનાં કારણો નીચે પ્રમાણે છેઃ—

(૧) ફોટો શી રીતે લેવો તેની માહીતી આપણને કોઈ મોઢેથી આપે, તો તે બરાબર સમજાશે નહિ એટલુંજ નહિ, પણ તે થોડાજ વખતમાં ભૂલી જવાશે. જો તેજ માહીતી આપણને પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ વડે કોઈએ આપી હોય, તો તે સારી રીતે સમજાશે, અને તે ઓછામાં ઓછા એક અઠવાડીઆ સુધી તો ભુલાશે નહિ; પણ તેજ પ્રયોગ આપણે પોતાને હાથે કરીએ, તો તે બાબત ઉત્તમ પ્રકારે સમજાશે એટલુંજ નહિ, પણ તે આસરે એક વરસ સુધી યાદ રહેશે. કોઈ બાબતનું વર્ણન સાંભળવાથી, તે પ્રત્યક્ષ જોવાથી, અને તે જાતે કરવાથી, એ ત્રણ પ્રકારે મળતા જ્ઞાનમાં આવો તફાવત પડે છે. કોઈ પણ પ્રકારના જ્ઞાનને આ નિયમ લાગુ પડે છે. આ ઉપરથી એવો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે, કે કોઈ પણ વસ્તુનું જ્ઞાન એકલા વર્ણનથી થાય છે, તે કરતાં વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ જોવાથી થાય છે,

અને તેથી પણ વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ પોતાને હાથે કરવાથી, અથવા તે વસ્તુનો ઉપયોગ પોતાને હાથે કરવાથી થાય છે. તેથી જ્ઞાન પાકું થાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રયોગ વિદ્યાર્થીએ જાતે કરવા અવશ્યના છે. ભૂમિતિનાં સત્યો વ્યવહારમાં આપણી નજરે પડતાં ન હોવાથી તેમને દૃશ્ય રૂપમાં જોવાની આવશ્યકતા વિશેષ છે. એમ હોવાથી પહેલાં આ વિષય કેવળ વ્યાખ્યાનદ્વારા શીખવાતો હતો તેથી શું પરિણામ આવતું હતું તે આપણે સૌ જાણીએ છીએ. ભૂમિતિ એ વિષય ઘણોજ કઠણ ગણાતો હતો એ વાત ખાતરીપૂર્વકજ સિદ્ધ કરી આપે છે, કે આ વિષય શીખવવાની જુની પદ્ધતિ અયોગ્ય અને કઠણ હતી. 'કાટખુણો,' 'સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ,' વગેરે સંજ્ઞામાં અથવા 'ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એવા એકાદ સિદ્ધાંતમાં રહેલી કલ્પના 'પ્રત્યક્ષ આકૃતિથી અને પ્રયોગથી સ્પષ્ટ કરી બતાવો" એમ કહ્યું હોત, તો (યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકના ૩૨ સિદ્ધાંત જેમને ચાલ્યા છે એવા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી) કેટલા થોડા વિદ્યાર્થીઓ એવા પ્રશ્નનો સંતોષકારક જવાબ આપી શકત એ વાતનો વિચાર કરીએ તો જુની પદ્ધતિ કેટલી અયોગ્ય હતી એ સમજી શકાશે. આ પદ્ધતિને લીધે છોકરાઓનું આકૃતિના ધર્મોનું જ્ઞાન ઘણુંજ અધુરૂં રહેતું અને ઘણોખરો વિષય તેમને ગોખવો પડતો હતો. આ સ્થિતિ દૂર કરવા માટે, આકૃતિના સંબંધમાં છોકરાઓ પાસે પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કરાવવા એજ એક ઉપાય છે સમાંતર લીટીઓને છેદતી લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે, એ વાત યુક્લિડના ૨૯મા સિદ્ધાંતની શાબ્દિક સિદ્ધતા કર્યા પછી જેટલી યાદ રહેશે, તે કરતાં તે ખુણા સરખા હોય છે એ વાત પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી બતાવી હોય તો વધારે સારી રીતે યાદ રહેશે; અને તેજ વાતની ખાતરી વિદ્યાર્થીઓ પોતાને હાથે કરેલા પ્રયોગ વડે કરી જુએ, તો પાકી ધ્યાનમાં રહેશે એ તદ્દન ખુલ્લું છે. આ ઉપરથી ભૂમિતિના નિયમો ધ્યાનમાં રાખવામાં વિદ્યાર્થીઓએ જાતે કરેલા પ્રયોગ તેમને મદદ કરે છે એ નિર્વિવાદ છે. તેથી આકૃતિઓ

બરાબર કાઢવી અને તેમના ધર્મ તપાસી જોવા એ બે બાબતને નવી ભૂમિતિમાં પ્રાધાન્ય આપવામાં આવ્યું છે.

(૨) વિગમનપદ્ધતિની મદદથી વ્યાખ્યાઓનું અને સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન આપવા વિષે:—પારિભાષિક સંજ્ઞા અને સિદ્ધાંતોનો સાધારણ ખ્યાલ આવે તે માટે તે સંજ્ઞાઓ તથા સિદ્ધાંતોમાં દર્શાવેલી બાબતોનું પ્રત્યક્ષ અવલોકન જેમ આવશ્યક છે, તેમજ તે સંબંધનું જ્ઞાન પાકું થાય અને લાંબા વખત સુધી ટકે તે માટે તે બાબતોનું અવલોકન કર્યા પછી છોકરાઓએ પોતેજ માનસિક પ્રયત્ન કરવાની જરૂર છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જે વાતો આપણે પોતાની બુદ્ધિના શ્રમથી શીખીએ છીએ, તે આપણને બરાબર સમજાય છે એટલુંજ નહિ, પણ તે પાકી ધ્યાનમાં રહે છે; અને જે વાતો આપણે બીજા લોકો પાસેથી શીખીએ છીએ તે તેટલી સારી પેઠે સમજાતી નથી, અને તે આપણા ધ્યાનમાં લાંબો વખત રહેતી પણ નથી. છોકરાઓના મનની સ્થિતિ પણ એવીજ હોય એ સ્વાભાવિક છે; એટલે જે જ્ઞાન છોકરા પોતાના શ્રમથી મેળવે છે તે તેમના મનમાં બરાબર ઠસે છે; માટે વ્યાખ્યા અને સિદ્ધાંતનું જ્ઞાન ચાલતાં સુધી છોકરા પોતાની મહેનતથી મેળવે એમ કરવું. એમ કરવાનો યોગ્ય માર્ગ એ છે, કે જે વસ્તુઓના ધર્મોનું જ્ઞાન છોકરાઓને આપવું હોય, તે વસ્તુઓના જુદા જુદા પ્રકાર છોકરા આગળ મૂકવા, અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને તે ઉપરથી થતાં અનુમાન છોકરા પાસે કઢાવવાં. એટલા માટે નવી ભૂમિતિમાં વ્યાખ્યા શીખવવાની પદ્ધતિ એવી છે, કે જે આકૃતિની વ્યાખ્યા છોકરાઓને શીખવવી હોય, તે આકૃતિ તેમની પાસે કઢાવીને તેની બાજુઓ, ખુણા, વગેરે ભાગોની પરીક્ષા તેમનીજ પાસે કરાવવી; પછી તેજ જાતની બીજા પ્રકારની આકૃતિઓ કઢાવીને તેમની એક બીજી સાથે સરખામણી કરાવવી; અને આ સરખામણી પરથી જે સામાન્ય ધર્મ જણાઈ આવે તેની મદદથી વ્યાખ્યા ઉપજાવવી. પ્રમેયોનું ખરાપણું

નક્કી કરવાની રીત પણ એવીજ છે; એટલે પ્રમેયોના અનેક પ્રત્યક્ષ દાખલા લેવા અને તે પરથી સામાન્ય સિદ્ધાંત નક્કી કરવો.

કોઈ પણ નિયમ કે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાની બે પદ્ધતિ છે: એક, બીજા સામાન્ય નિયમોને આધારે તે નિયમ નક્કી કરવાની; અને બીજી, પ્રત્યક્ષ વિશેષ દાખલાઓ વડે તે નિયમ નક્કી કરવાની. આ પૈકી હમણાં ઉપર વર્ણવી તે પદ્ધતિ બીજા પ્રકારની છે. પહેલી પદ્ધતિમાં દોષ એ છે, કે શબ્દોના અર્થના અનિશ્ચિતપણાને લીધે અને જે સામાન્ય નિયમના આધારે અમુક નિયમ નક્કી કરવાનો હોય તેને અપવાદ હોવાથી, તેમજ જુદાં જુદાં વિધાનો (કહેલી બાબતો) ઉપરથી નિર્દોષ અનુમાન શી રીતે કાઢવું એ વિષેના (લોકોના) અજ્ઞાનને લીધે, આ પદ્ધતિથી નક્કી કરેલો સિદ્ધાંત કોઈ કોઈ વખતે ખોટો પડે છે. પરતુ બીજી પદ્ધતિમાં ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઠેરવવાનો હોવાથી, જોઈએ તેટલાં જુદાં જુદાં ઉદાહરણો લીધાં હોય તો સિદ્ધાંત ખોટો ઠરવાનો સંભવ ઘણો થોડો હોય છે. માટે ખરા સિદ્ધાંત ઉપજાવવાને આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી છે. તે ઉપરાંત આ પદ્ધતિમાં પ્રત્યક્ષ ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઉપજાવવાનો હોવાથી સિદ્ધાંત સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. માટે આ પદ્ધતિની માહીતી અને વિશેષ પરિચય થવાની જરૂર છે, તેથી આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ નવી ભૂમિતિમાં કર્યો છે.

જો કે ખરો સિદ્ધાંત નક્કી કરવા માટે નિગમનપદ્ધતિ (સામાન્ય નિયમ પરથી વિશેષ નિયમ ઉપજાવવાની પદ્ધતિ) કરતાં વિગમનપદ્ધતિ વધારે ઉપયોગી છે, તોપણ એટલા ઉપરથીજ નિગમનપદ્ધતિ છેક નકામી ઠરતી નથી. કારણ ઘણી વાર એવું બને છે કે પહેલી પદ્ધતિથી સિદ્ધાંત નક્કી કરવાને જે ઉદાહરણો જરૂરનાં છે તે કોઈ કોઈ વખતે તો મળતાં પણ નથી, અને કોઈ કોઈ વખતે મળી શકે એમ હોય તોપણ તે જોવાને પુરતો વખત હોતો નથી. એવે વખતે અનુમાનથીજ સિદ્ધાંત નક્કી કરવો પડે છે. ન્યાયાધીશને ચુકાદો આપવાના કામમાં, તેજ પ્રમાણે

ઐતિહાસિક શોધ કરનારને, ભૂસ્તરશાસ્ત્રીને, તેમજ ખગોળશાસ્ત્રીને ભૂતકાળની અને અદૃશ્ય વાતો વિષે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાના કામમાં આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી થાય છે. પોતાની પાસે થોડાજ વખત પર આવેલો કોઈ માણુસ કેવાં લક્ષણુવાળો હશે, ક્યારે જઈએ તો અમુક માણુસ નક્કી ઘેર મળશે,......વગેરે રોજના વ્યવહારમાંની વાતો અનુમાનથીજ નક્કી કરવી પડે છે. તેથી આ પદ્ધતિની પણુ માહીતી અને પરિચય હોવાં જરૂરનાં છે; માટે યુક્લિડની ભૂમિતિમાંની અનુમાનપદ્ધતિ પણુ નવી ભૂમિતિમાં કાયમ રાખી છે.

સારાંશ એ છે કે નિયમ બરાબર સમજાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રથમ વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, અને પહેલાં નક્કી કરેલા સામાન્ય નિયમ ઉપરથી બીજા સિદ્ધાંતો, નિયમો, અથવા અનુમાનો શી રીતે કાઢવાં તે છોકરાઓ સમજે એટલા માટે પછીથી નિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, એવી વ્યવસ્થા નવી ભૂમિતિમાં છે.

(૩) ક્રમ વગેરે બાબતોમાં યુક્લિડથી જુદાપણું:—

અસાધારણુ બુદ્ધિવાળા કોઈ પણુ પુરુષે કરેલું કામ સર્વ અંગે પરિપૂર્ણ હોયજ એમ નથી. માણુસે કરેલું કામ ગમે તેટલું ઉત્કૃષ્ટ હોય, તોપણુ તેમાં દોષ હોવાનાજ. હોમર, શેક્સ્પિયર, કાળિદાસ, એમનાં કાવ્યો અને પ્લેટો, એરિસ્ટોટલ, ડાર્વિન, સ્પેન્સર, ભાસ્કરાચાર્ય, પાણિનિ, ઇત્યાદિ પંડિતોના તાત્ત્વિક અને શાસ્ત્રીય ગ્રંથો પોતાની જાતના ગ્રંથોમાં જો કે અદ્વિતીય છે, તોપણુ તેમાં સહેજસાજ દોષો કે ખામીઓ છેજ. તેવીજ રીતે કેટલાક દોષ યુક્લિડની ભૂમિતિમાં પણુ છે. તોપણુ યુક્લિડમાં કેટલાક દોષ છે એ વાતથી યુક્લિડની યોગ્યતા ઓછી થતી નથી. એક બુદ્ધિમાન ઇજનેરે એકાદ વિકટ ઘાટમાંનો રસ્તો ગમે તેટલી કુશળતાથી તૈયાર કર્યો હોય, તોપણુ તે રસ્તામાં પાછળથી થોડો ઘણો ફેરફાર કરવાની જરૂર પડે છેજ. તેવીજ સ્થિતિ યુક્લિડની ભૂમિતિની છે. યુક્લિડે સિદ્ધાંતોનો જે ક્રમ ઠેરવ્યો છે તે જો કે એકંદરે સારો છે, તોપણુ તેમાં કેટલેક ઠેકાણે ફેરફાર કરવાનો જરૂરનો જણાયો છે,

દાખલા તરીકે-યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકમાંના ૨ અને ૩ સિદ્ધાંતો કાઢી નાખીએ તોપણ ચાલે એમ છે. ચોથા અને પાંચમા સિદ્ધાંત કરતાં ૧૩, ૧૪, ૧૫, એ સિદ્ધાંતો સહેલા હોવાથી અને તે સીધી લીટી વિષેના હોવાથી તે પહેલાં લેવા એ વધારે સગવડભરેલું છે. તેમજ યુક્લિડના પહેલા પુસ્તકમાંનો ૮મો સિદ્ધાંત અને બીજા પુસ્તકનો ૧૩મો સિદ્ધાંત, એમની જે સિદ્ધતા યુક્લિડે આપી છે, તેના કરતાં નવી ભૂમિતિમાં આપ્યા મુજબ સહેલી સિદ્ધતા આપવી બની શકે એમ છે......વગેરે. એ પ્રમાણે યુક્લિડની ભૂમિતિમાં ફેરફાર કરવો અવશ્ય છે, એ કોઈ પણ જોઈ શકશે. આ કારણથી, જે ફેરફાર કરવાથી વિષય સહેલો થાય એમ લાગ્યું તેવા ફેરફાર નવી ભૂમિતિમાં કર્યા છે.

(૪) કંપાસ, આપવાની પટી, વગેરેની મદદથી આકૃતિ બરાબર કાઢવા વિષે.

આકૃતિના ધર્મ નક્કી કરવા એ ભૂમિતિનું મુખ્ય કામ છે. જો આ વિષયમાં 'સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,' 'આ ખુણો પેલા ખુણાથી મોટો છે,' 'આ લીટી પેલી લીટીથી મોટી છે,' વગેરે બાબતો સિદ્ધ કરવી હોય, તો એવી સરખામણી કરવા માટે આ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે, એ કોઈ પણ સમજી શકશે. સમબાજુ ત્રિકોણ, લંબચોરસ, ત્રિકોણમાંની મધ્યગા, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, વગેરે આકૃતિઓ બરાબર કાઢી હોય, તો 'સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,' 'લંબચોરસના કર્ણ સમાન હોય છે,' 'ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે,' 'સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે,' એ વગેરે બાબતો તરતજ સમજાય છે. એથી ઉલટું, જો આકૃતિ બરાબર કાઢી ન હોય, તો ઉપલી બાબતો સહેજમાં સમજાતી નથી એટલુંજ નહિ, પણ જે બાબતો આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ છીએ, તેમના ખરાપણા વિષે પણ શંકા ઉત્પન્ન થાય છે. દાખલા તરીકે—'એકજ ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે,' આ પ્રમેય સિદ્ધ કરતી વખતે

ખુણા સરખા કાઢેલા ન હોય તેા તે ખુણાની સામેની બાજુએા નાની મેાટી આવશે; અને તેમનું નાનામેાટાપણું સ્પષ્ટ હોવાથી, આપણે તેમને સરખી કહીએ છીએ એ બરાબર છે કે કેમ, એવી શંકા સ્વાભાવિક રીતે ઉત્પન્ન થશે. આ કારણથી આકૃતિએા બરાબર કાઢવી જરૂરની છે.

આકૃતિએા બરાબર કાઢવા માટે કંપાસ, માપવાની પટી, વગેરે સાધનેાની આવશ્યકતા છે. તેથી આ સાધનેાનેા ઉપયેાગ કરવેા, એ પણ નવી ભૂમિતિનું એક ખાસ લક્ષણ છે. યુક્લિડમાં કંપાસ અને આંકણી એ સાધનેાથી આકૃતિએા કાઢવાનું કહ્યું છે; પણ એવી આકૃતિએા દેારી છે, એમ ધારી લેવાનેા રિવાજ પડી ગયેા હતેા. નવી ભૂમિતિમાં તેા એવી છૂટ આપવામાં આવતી નથી.

નવી ભૂમિતિનાં બીજાં (ગૌણ) લક્ષણેા નીચે મુજબ છે:-

(૧) કેાઈ પણ વિધાનના આધાર માટે 'ફલાણેા સિદ્ધાંત' એમ કહી સિદ્ધાંતનેા ક્રમાંક આપવાની આ ભૂમિતિમાં આવશ્યકતા નથી. આધાર માટે સિદ્ધાંતનેા ક્રમાંક કહેવાની પદ્ધતિને લીધે, અમુક સિદ્ધાંતમાં શું છે તેની દરકાર ન રાખતાં વિદ્યાર્થીએા સિદ્ધાંતેાના ક્રમાંક ગેાખી રાખે છે. એનું પરિણામ એવું આવે છે, કે તેએા જે વિધાન કરે છે તેને વાસ્તવિક રીતે કયાં કારણેાનેા આધાર છે તેનું તેએાને ભાન હેાતું નથી. 'ક્ષ ખુણેા = ક્ષ ખુણેા,—આધાર ૨૯મેા સિદ્ધાંત'–એવું એક વખતે ગેાખી રાખ્યું હેાય, તેા એક ખુણેા બીજા ખુણા બરાબર છે એમ કહેવા માટે કયાં કારણેાની જરૂર છે, એ વાત સારી પેઠે ધ્યાનમાં રહેતી નથી; અને બે વ્યુત્ક્રમ ખુણા ખરૂં જોતાં બરાબર ન હેાય તેાપણ તે બરાબર છે એમ ધારવાનું મનમાં આવ્યું, કે ૨૯મા સિદ્ધાંત પ્રમાણે તે બરાબર છે એવું એકદમ છેાકરાના મેાઢેથી નીકળી જાય છે. એમ ન થાય એટલા માટે આધાર આપતી વખતે છેાકરાએા પાસે સિદ્ધાંતનેા ક્રમાંક કહેવડાવવાને બદલે જે પક્ષ ઉપરથી સાધ્ય નીકળે છે તે પક્ષ તેમની પાસે કહેવડાવવાની પદ્ધતિ નવી ભૂમિતિમાં છે. તેાપણ આધાર હંમેશાં એવી

રીતે આપવોજ જોઈએ એમ નથી; કારણ કે છોકરાઓને એક વખત કારણ ધ્યાનમાં લઈને પછી વિધાન કરવાની ટેવ પડી ગઈ, એટલે પછી તેમને આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની છૂટ આપી હોય તોપણ ચાલે.

આ પુસ્તકમાં આધાર કહેતી વખતે સિદ્ધાંતના ક્રમાંકજ આપ્યા છે; પણ જગાનો બચાવ કરવા માટેજ એમ કર્યું છે. તેનું અનુકરણ શરૂઆતમાં તો, વિદ્યાર્થીઓએ સર્વથા ન કરવું.

(૨) ચિહ્નોનો ઉપયોગ:—

अ ખુણો ब ખુણા બરાબર છે; અથવા बથી મોટો છે, એમ લખવાને બદલે ∠अ=∠ब, અથવા ∠अ > ∠ब, એમ લખવું સહેલું અને તે વધારે વ્યવસ્થિત દેખાય છે; અને તે વાંચવું પણ વધારે સગવડભરેલું લાગે છે; માટે નવી ભૂમિતિમાં ચિહ્નોનો છૂટથી ઉપયોગ કર્યો છે. પરીક્ષામાં આ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવા માટે પહેલાં પરીક્ષકોની સંમતિની જરૂર હતી, પણ હવે તેવી સમતિની જરૂર નથી.

(૩) આધાર માટે પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યોનો નામ દઈને ઉપયોગ કરવાની જરૂર નથી. પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યનો આધાર જે બાબત માટે લેવાનો હોય છે તે 'પ્રત્યક્ષ' અને 'સહેજ સમજાય એવી' હોય છે, માટે એવી બાબતોને સ્વતંત્ર આધારની જરૂર નથી.

સૂચના—ભૂમિતિના વિષયની માહીતી પ્રયોગદ્વારા વિદ્યાર્થીઓને શી રીતે કરી આપવી તેનું દિગ્દર્શન કરાવવાના ખાસ હેતુથીજ આ પુસ્તકના **૧લા ખંડમાંની માહીતી આપી છે. તે શિક્ષકોએ ખાસ વાંચવી અને તેમાં કહ્યા પ્રમાણે વિદ્યાર્થીઓ પાસે કૃતિ કરાવવી.**

નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો.

ખંડ ૧લો.

(પ્રાયેાગિક ભાગ.)

વિદ્યાર્થીઓને અવશ્ય જોઈતાં સાધનેા.

માપ લેવાની પટી.—જેના પર ઇંચ અને ડેસિમીટર, તથા તે બંનેના અંશ અથવા ભાગ બતાવેલા હોય એવી પટી. [જે પટીના એકજ પૃષ્ઠની બંને કોરેા ઢાળ પડતી હોઈ, એક કોર પર ઇંચ અને બીજી કોર પર મીટરના ભાગ બતાવ્યા હોય એવી પટી વધારે સારી.]

સેટ્ સ્કવેર કે ત્રિકોણમાપ.—(૧) જેના ખુણા ૯૦°, ૬૦°, અને ૩૦°ના હોય, અને જેનેા કર્ણ (સૌથી લાંબી બાજુ) આસરે ૬ ઇંચ હોય, એવું ત્રિકોણમાપ. (૨) ૯૦°, ૪૫°, અને ૪૫°ના ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ. [આ ન હોય તોપણ ચાલે.]

વિભાજક (જેનાં બંને પાંખાં અણીવાળાં હોય છે તે) અને **કંપાસ** (જેના એક પાંખામાં પેન્સિલ બેસાય છે તે)—[જેમાં જરૂરિઆત પ્રમાણે પેન્સિલ કે પોલાદી અણીઉં બેસાડી શકાય એવેા કંપાસ હોય તેા જુદા વિભાજકની જરૂર નહિ પડે.]

એચ્ પેન્સિલ.—૨ એચ્ કે ૩ એચ્ની પેન્સિલ હોય તેા વધારે સારૂં. બની શકે તેા ૩ એચ્ની પેન્સિલનેા ઉપયેાગ કરવેા.

[કંપાસની પેન્સિલની અને આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી પાલિશ પેપરથી (કાચ પાએલા કાગળથી) ઘસીને હંમેશાં ઝીણી રાખવી. આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી સેાયના જેવી ઝીણી ન રાખતાં ફરસીના જેવી ચપટી રાખવી.]

કેાણમાપક.—(પ્રેાટ્રેક્ટર)—અર્ધવર્તુળાકાર કેાણમાપક કરતાં ચતુષ્કેાણ કેાણમાપક વધારે સારેા ખરેા; પણ શરૂઆતમાં અર્ધવર્તુળાકાર કેાણમાપકનેા ઉપયેાગ કરવેા સહેલેા પડે છે, માટે તેનેાજ ઉપયેાગ કરવેા.

તે સિવાય ટ્રેસ કરવાનેા કાગળ, ચેારસ આંકેલી એક્સર્સાઇઝ બુકેા,* દેારેા, ટાંકણી, વગેરે.

[પ્રયેાગ ઉપરથી જે અનુમાન નીકળે છે તે વિદ્યાર્થીઓએ એક જુદીજ નેાંધપેાથીમાં નેાંધી રાખવાં.]

લીટીઓ માપવા વિષે.

લીટીઓ માપવા માટે પટી અને વિભાજક વપરાય છે.

આપ લેવાની પટી (અથવા ફુટપટી અને મીટરપટી)—આ પટી પર એક કેારે ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ, તથા બીજી કેારે **મીટરના**‡

---

* ભૂમિતિના બીજા ભાગમાં વાપરવા માટે.

‡ **મીટર**—જુદા જુદા દેશમાંનાં વજન તથા માપ જુદાં જુદાં હેાવાથી વેપારને તેમજ બીજા વ્યવહારને ભારે હરકત નડે છે. લેાકેાને આજ ઘણાં વર્ષ થયાં તે દૂર કરવાની ઇચ્છા થઈ છે; પરતુ આ કામ માટે ફ્રેન્ચ સિવાય બીજા કેાઈ લેાકેા આગળ આવ્યા નથી. તેમણે આજથી આસરે ૭૫ વર્ષ પહેલાં જુનાં વજન અને માપ બંધ કરીને તેમની જગાએ નિયમિત પ્રમાણમાં (દશકથી) વધતાં અને ઘટતાં નવાં માપ યેાજ્યાં. માપ માટે પ્રથમ પરિમાણ જે લેવું તે ગમે તે એક સંકેત નક્કી કરીને નહિ, પણ કેાઈ અમુક નિશ્ચિત અને સર્વસામાન્ય પરિમાણને આધારે લેવું, એમ વિચારીને તેમણે પૃથ્વીના એક અમુક યામ્યેાત્તરવૃત્ત ઉપરથી લંબાઈનું

ભાગ જણાવેલા હોય છે. એક મીટર એટલે આસરે ૩૯·૩૭ ઇંચ થાય છે. મીટરના ડેસિમીટર, સેન્ટિમીટર, મિલિમીટર, એવા ભાગ છે. પટી પર દર્શાવેલા મીટરના ભાગ પૈકી સૌથી નાનો ભાગ (પાસ પાસેની બે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર) મિલિમીટર છે.

મીટરનું કોષ્ઠક.

(મિલિમીટર = $\frac{૧}{૧૦૦૦}$ મીટર).

૧૦ મિલિમીટર= ૧ સેંટિમીટર ($\frac{૧}{૧૦૦}$ મીટર)
૧૦ સેંટિમીટર = ૧ ડેસિમીટર (=$\frac{૧}{૧૦}$ મીટર)
૧૦ ડેસિમીટર = ૧ મીટર
૧૦ મીટર = ૧ ડેકામીટર (=૧૦ મીટર)
૧૦ ડેકામીટર = ૧ હેક્ટોમીટર (=૧૦૦ મીટર)
૧૦ હેક્ટોમીટર= ૧ કિલોમીટર (=૧૦૦૦ મીટર)

આ ભૂમિતિમાં ઉપલાં છેલ્લાં ત્રણ માપનો બીલકુલ ઉપયોગ નથી, તેથી વિદ્યાર્થીએ તે ધ્યાનમાં રાખવાની જરૂર નથી.

પટી ઉપરના ઇંચ અને તેના દશાંશ, અને તેવીજ રીતે મીટરના ભાગ છોકરાઓ બરાબર સમજ્યા છે એવી પોતાની ખાતરી કરી લઈ પછી છોકરાઓ પાસે લીટીઓ મપાવવી.

લંબાઈ કે અંતર માપવાની ચોકસ રીતઃ—કોઈ અમુક લીટીની લંબાઈ કે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ચોકસાઈથી માપવા

મૂળ પરિમાણ નક્કી કર્યું છે, અને તેને મીટર એ નામ આપ્યું છે. મીટર એ પારિસમાં થઈ જતા યામ્યોત્તરવૃત્તનો $\frac{૧}{૪૦૦૦૦૦૦૦}$ ભાગ છે. આ મીટર ઉપરથીજ તેમણે બધાં વજન અને માપ નક્કી કર્યા છે. દાખલા તરીકે–આર અથવા ૧૦૦ ચોરસ મીટર એ ક્ષેત્રફળનું મૂળ પરિમાણ છે; એક ઘન સેન્ટિમીટર પાણીનું (૩૯·૨ ફેરેન્હાઇટ ઉષ્ણતામાને) વજન, કે ગ્રામ, તે વજનનું મૂળ પરિમાણ છે; અને લિટર અથવા એક ઘન ડેસિમીટર એ અનાજ વગેરેના ભરતલના માપનું મૂળ પરિમાણ છે.

માટે વિભાજકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ રીત નીચે પ્રમાણે છે:—જે અતર માપવું હોય, તે કરતાં જરા વધારે અંતર વિભાજકની અણીઓ વચ્ચે રહે એમ વિભાજક ઉઘાડવો; પછી હળવે રહી દબાવીને અણીઓની વચ્ચેનું અંતર ઓછું કરતાં કરતાં બે અણી આપેલી લીટીના બે છેડા પર બરાબર આવે એમ કરવું; પછી વિભાજકની અણીઓ પટી પર મૂકી પટી પરનું અંતર ગણવું. (વિભાજકનાં પાંખાં પટી પર ઉભાં ન રાખતાં ત્રાંસાં કે આડાં રાખવાં; એમ કરવાથી વિભાજકની અણી પટીને વાગવાથી પટીને કાણાં પડવાની બીક રહેશે નહિ.)

ખાસ ચોકસાઈની જરૂર ન હોય ત્યારે લીટી માપવા માટે ફક્ત પટીનો ઉપયોગ કરવો. પટીથી લીટી માપવી હોય તો તે કામ માટે લંબાઈની બંને બાજુએ ઢાળ પડતી હોય એવી પટી સારી પડશે.

પટી બંને બાજુએ ઢાળ પડતી ન હોય, તો પટી લીટી પર મૂક્યા પછી, લીટીનો છેડો પટી પરની કઈ નિશાનીની નીચે આવે છે તે જોવા માટે લીટીના છેડાની ઉપલી બાજુએ લંબમાં આંખ મૂકીને જોવું. લંબમાં ન જોતાં વાંકું જોયું હોય તો લીટીનો છેડો ખરેખર જે કાપા નીચે હોય છે તેનાથી કોઈ જુદાજ કાપા નીચે દેખાય છે. એમ કેમ બને છે તે નીચેની આકૃતિ ઉપરથી જણાઈ આવશે.

(પટીની ઉપલી આકૃતિમાં ઉભી લીટી પટીની જાડાઈ દર્શાવે છે. એ ધ્યાનમાં રાખવું.

ધારો કે **अब** લીટીની લંબાઈ માપવી છે. જોનારની આંખ **यह** લંબના **ह** બિંદુ પાસે હશે, તો **ब** છેડો **र** બિંદુની નીચે દેખાશે, અને **अब** લીટીની લંબાઈ **फर** જેટલી લાગશે; જો આંખ **ई** સ્થાનમાં હશે, તો **अब** લીટીની લંબાઈ **फल** જેટલી લાગશે; આંખ **क** સ્થાને હશે, તો **अब**ની લંબાઈ **फय** જેટલી લાગશે.

પ્રશ્નો.

૧. **अब** લીટીની લંબાઈ ઇંચ અને મિલિમીટરમાં માપો.

अ ——————————— ब

૨. આ પુસ્તકની લંબાઈ અને પહોળાઈ ઇંચ અને મિલિ-મીટરમાં માપો.

૩. ઉપલા પ્રશ્નોના જવાબ ઉપરથી એક ઇંચમાં કેટલાં મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો. વિભાજકની અણીઓનું અંતર ૩.૯ ઇંચ રાખો, અને તે અણીઓ પટી પર મિલિમીટરોની બાજુએ મૂકીને તેમાં કેટલાં સેંટિમીટર અને મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો.

૪. માપવાની પટીની મદદથી નીચેની બે લીટી પૈકી દરેકની લંબાઈ મીટર અને ઇંચના દશાંશમાં કહો.

———————————

———————————

૫. **अक**, **कब**ની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી **अब**ની લંબાઈ માપીને પહેલો જવાબ બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

अ ———— क ———— ब

*૬. **अक**, **कड**, **डब**ની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી **अब**ની લંબાઈ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

* લંબાઈ કે અંતર ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ તથા મિલિમીટરમાં આપવામાં આવે છે.

મિલિમીટરમાં પણ લંબાઈ માપીને ઉપલા प्रश्नना જવાબ કાઢો.

अ	क	ड	

૭. अब લીટીની લંબાઈ માપો. अकની લંબાઈ માપીને તે अबમાંથી બાદ કરો, એટલે कबની લંબાઈ નીકળશે. कबની લંબાઈ પ્રત્યક્ષ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

अ ——— क ——— ब

૮. ૨.૭ ઇંચ લાંબી લીટી લો, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક બિંદુ લઈને તેનાં બંને છેડેથી અંતરો માપો. તેમનો સરવાળો કરો, અને તે ૨.૭ થાય છે કે નહિ તે જુઓ. થતો ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૯. अब લીટી ૪.૫"* લો. તેમાં अक=૧.૨", कड=૨.૬" લઈને डबની લંબાઈ માપો. તે ખરી લંબાઈની સાથે મળતી આવે છે કે કેમ તે જુઓ. મળતી આવતી ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૧૦. એક ૬.૬"ની લીટી લો. તેના ૧ : ૫ના પ્રમાણમાં હોય એવા બે ભાગ કરો.

(નીચેના ૧૧–૧૬ પ્રશ્નો પહેલે ફેરે મૂકી દીધા હોય તોપણ ચાલે.)

૧૧. એક લીટી લઈને તેની લંબાઈની અટકળ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. (પુ૦)×

૧૨. ૩.૬" લીટી લઈને તેના અર્ધા ભાગની લંબાઈ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલો ભાગ કાપો. બાકી રહેલા ભાગની લંબાઈ માપીને તે થવી જોઈએ તેટલી છે કે કેમ તે જુઓ.

---

* " આ ચિહ્નનો અર્થ ઇંચ થાય છે. દાખલા તરીકે ૧.૨" એટલે ૧.૨ ઇંચ.

× પુ૦ = પુનરાવર્તન; એટલે એજ બાબતનું પુનરાવર્તન કરો. કોઈ પણ બાબત બરાબર આવડે ત્યાંસુધી તેનું પુનરાવર્તન કરવું પડે છે.

૧૩. ૩૩ મિ. મી. + લીટી લઈને તેનો ત્રીજો ભાગ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલા મોટા બે ભાગ તે લીટીમાંથી કાપી કાઢો. રહેલા ત્રીજા ભાગની લંબાઈ માપીને તે બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૪. **અબ**ના અટકળથી સરખા બે ભાગ કરો, અને તે બરાબર છે કે નહિ તે પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. (પુ૦)

૧૫. **અબ**ના અટકળથી ત્રણ સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૬. **અબ**ના અટકળથી ચાર સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

(જવાબ સાધારણ રીતે બરાબર આવે ત્યાંસુધી વિદ્યાર્થીએ ઉપર પ્રમાણે લીટીઓની લંબાઈ અટકળથી માપવાનો મહાવરો કરવો.)

લીટીઓ દુભાગવા વિષે.

આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ કરવાની સ્થૂળ રીતઃ-

વિભાજકની અણીઓ આપેલી લીટીની અર્ધી લંબાઈ જેટલે અંતરે આસરે રાખવી. લીટીને વિભાજક લગાડીને આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ પડે છે કે કેમ તે જોવું. પડતા હોય તો ઠીકજ છે; પરંતુ પડતા ન હોય તો જે તફાવત પડે તેનો અર્ધો ભાગ વિભાજકની અણીઓની વચ્ચેના અંતરમાં જરૂર જણાય તેમ વત્તો કે ઓછો કરવો.

દાખલા તરીકેઃ—**અબ** લીટીના બે સરખા ભાગ કરવા છે. તેના આસરે અર્ધા ભાગ જેટલે અંતરે વિભાજકની બે અણીઓ રહે એટલો વિભાજક પહોળો કરો, અને તે **અબ** લીટી પર મૂકો. ધારો કે તે બે અણીઓ **અ** અને **ગ** પર પડે છે. એમજ બીજી વાર વિભાજકને **ગ** બિંદુથી શરૂ કરીને મૂકો એટલે બીજી અણી **ક** પર પડશે.

+ મિ. મી. = મિલિમીટર.

આ બે ભાગ મળીને આપેલી લીટીથી ઓછા થાય છે, માટે બાકી રહેલા (कब અક્ષરથી દેખા-ડેલા) અંતરના અર્ધ જેટલી (कड જેટલી) વિભાજકની

अ ग ह क ड ब

અણીઓ વધારે પહોળી કરવી. એટલે પહેલાં વિભાજકની અણીઓ વચ્ચે कग જેટલું અંતર હતું તે અંતર હવે गड જેટલું થશે. હવે વિભાજક લીટી પર મૂકશો તો તેની બે અણીઓ પહેલી વખત अ ને ह પર, ને બીજી વખત ह ને ब પર પડી રહેશે. એટલે अब લીટી ह બિંદુમાં દુભગાઈ.

એજ રીતે આપેલી કોઈ પણ લીટીના, જે સંખ્યા બેનો ઘાત હોય તે સંખ્યા જેટલા સરખા ભાગ કરી શકાશે.

પ્રશ્નો.

૧. ૩·૨", ૪·૩", ૨·૯", ૩·૭" લંબાઈની લીટી દોરો, અને તેમના બે સરખા ભાગ કરો.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાંની લીટીઓના ૪ સરખા ભાગ કરો.

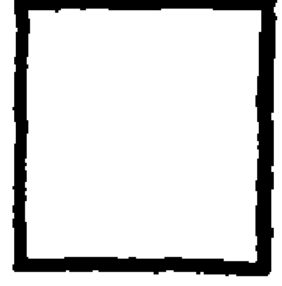
કાગળ વાળીને લીટી દુભાગવાની રીત:—अब લીટી કાગળ પર દોરો. હવે એ કાગળને એવી રીતે વાળો કે આખી अब લીટી સળ ઉપર બહારની બાજુએ બરાબર આવી રહે. હવે अ છેડો ब ઉપર આવે એવી રીતે કાગળ ફરીથી વાળો. બીજી વખત વાળતાં જ્યાં સળ પડશે ત્યાં લીટીના સરખા બે ભાગ થશે.

કાગળ ઉપર ૨", ૨·૫", ૩", ૩·૭", ૩·૩", ૪·૯"...લંબાઈની લીટીઓ લઈને તે ઉપલી રીતે દુભાગો, અને તે બરાબર દુભગાઈ છે કે કેમ તે વિભાજકની મદદથી તપાસી જુઓ.

સ્કેલ કે અંતરપ્રમાણ.

વર્ગમાંના કાળા પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ફુટ છે ?

"ચાર ફુટ." એજ પાટીઆની આકૃતિ આ પાના પર દોરી છે તે જુઓ. આ આકૃતિમાંની પાટી-આની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ઇંચ છે? "આ લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે." આ ઉપરથી પાટીઆની લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે એમ સમજવાનું કે? આ આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ પરથી ખરી લંબાઈ કેટલી સમજવાની? "ચાર ફુટ"



આ આકૃતિમાંની પાટીઆની પહોળાઈ માપો. તે કેટલી છે? "અર્ધો ઇંચ." આ ઉપરથી પાટીઆની ખરી પહોળાઈ કેટલી છે, તે તમારા જાણવામાં આવે છે? "ચાર ફુટ." આ કેમ સમજાયું? "પેલી આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ જો ૪ ફુટ દર્શાવે છે, તો અર્ધો ઇંચ પહોળાઈ પણ ૧ ફુટ દર્શાવે છે.?

પાસે ટેકરીનું ચિત્ર દોરેલું છે. આ ટેકરીની ઉંચાઈ કેટલી છે, તે ચિત્ર ઉપરથી તમે કહી શકશો કે? તે કહેવાને વળી કઈ બાબત આપેલી હોવી જોઈએ? "ચિત્ર અને ટેકરી એ બેની ઉંચાઈનું પ્રમાણ"



આકૃતિમાં બતાવેલું અંતર (લંબાઈ, પહોળાઈ, વગેરે) અને ખરૂં અંતર એ બેની વચ્ચેના પ્રમાણને **અંતરપ્રમાણ** (અંગ્રેજીમાં સ્કેલ) કહે છે. આ પ્રમાણ આપેલું ન હોય તો આકૃતિ જોનારને, તે આકૃતિ જે વસ્તુની છે તે વસ્તુનું ખરૂં પરિમાણ શું છે તે જણાશે કે? "ના." ઠીક. જો પ્રમાણની જરૂર ન રાખતાં વસ્તુઓ હોય તેટલી મોટી દોરવા જઈએ તો શી અગવડ પડે? "......"

'વસ્તુ જેટલા કદની હોય તેટલાજ કદની આકૃતિ કાગળ પર સાધારણ રીતે દોરી શકાતી નથી. દાખલા તરીકે, ઘણાજ નાના પદાર્થો જેટલા કદના દેખાય છે, તેટલીજ નાની તેમની આકૃતિ હાથે કાઢી શકાતી નથી; અને યંત્રોની મદદથી (ફોટો વગેરે લઈને) તે કાઢી શકાતી હોય, તોપણ તે નરી આંખો વડે જોનારને સ્પષ્ટ દેખાતી

નથી; માટે તે અસલ પદાર્થ કરતાં મોટી દોરવી પડે છે. એથી ઉલટું, જે પદાર્થો મોટા હોય છે, તેમની આકૃતિ તેમના જેટલી મોટી દોરવા માટે ઘણોજ મોટો કાગળ લેવો પડશે; માટે તેમની આકૃતિ તેમનાથી નાની દોરવી પડે છે. આ કારણને લીધે વસ્તુની આકૃતિ દોર્યા પછી તે વસ્તુનું ખરેખર કદ કેટલું છે એ સમજવા માટે તે આકૃતિની લંબાઈ અને તે વસ્તુની ખરી લંબાઈ એ બેનું પ્રમાણ આપવું પડે છે. નકશાની નીચે સ્કેલ આપે છે તે એટલાજ માટે.

અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક—આકૃતિની લંબાઈ અંશની જગાએ, અને વસ્તુની ખરી લંબાઈ છેદની જગાએ લખવાથી જે અપૂર્ણાંક આવે છે, તેને **અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક** કહે છે. દાખલા તરીકે, આકૃતિમાં એક ઈંચ એક માઇલ દેખાડતો હોય ત્યારે $\frac{૧}{૫૨૮૦\times૧૨}=\frac{૧}{૬૩૩૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૨ ઈંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{૨}{૫૨૮૦\times૧૨}=\frac{૧}{૩૧૬૮૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૩ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{૩}{૫૨૮૦\times૧૨}$ આ અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક થાય;...વગેરે.

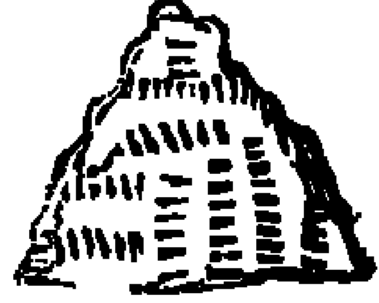
પ્રશ્નો.

૧. હિંદુસ્તાનના નકશા ઉપરથી નીચેનાં સ્થળોની વચ્ચેનું અંતર કાઢો:—કાશી અને કલકત્તા, કરાંચી અને કલકત્તા, મુંબઈ અને મદ્રાસ, વગેરે.

૨. પાસે જે ઝાડોનાં ચિત્ર આપેલાં છે, તે જે પ્રમાણ ઉપર દોરેલાં છે, તે પ્રમાણ ૧" : ૫' એટલે એક ઇંચ પાંચ ફુટ માટે* છે, તો તેની ઉંચાઈ કેટલી તે કહો.



* ' આ નિશાની ફુટ માટે છે દાખલા તરીકે ૫'=૫ ફુટ.



૩. પાસે દેખાડેલા ડુંગરની ઉંચાઈ કાઢો. સ્કેલ ૧"=૧૦૦૦.'

૪. એક માઇલ માટે એક ઇંચ પ્રમાણ લઈને જેમની વચ્ચે ૨¾ માઇલ અંતર છે એવાં બિંદુ કાઢો.

૫. ૧"=૨ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને ૪ માઇલ લાંબો સીધો રસ્તો કાઢો.

૬. ૧"=૧ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને જેમની વચ્ચેનું અંતર ૨·૫ માઇલ હોય એવાં બે ગામની જગાઓ ટપકાંથી દર્શાવો.

૭. ૨"=૧ યાર્ડ, એ સ્કેલ લઈને ૪૫" ઉંચી લાકડી ઉભી લીટીથી દર્શાવો.

સૂચના—નીચેના પ્રશ્નો છોડવા માટે કાટખુણો કાઢવાની રીતની જરૂર પડે છે. તે પાછલાં પાનાં જોઈને કહેવી, અથવા તે ભાગ ચલાવ્યા પછી નીચેના પ્રશ્ન છોડાવવા.

૮. ૫૦૦' લાંબા અને ૧૦૦' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સેં.મી.×=૧૦૦'.)

૯. ૩૨૨' લાંબા અને ૧૮૨' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સેં.મી.=૧૪'.)

૧૦. જેની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે ૪૦૦' અને ૩૦૦' છે, અને જેની આસપાસની ભીંતની જાડાઈ ૧૦' છે, એવા તળાવની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧"=૧૦૦'.)

૧૧. **બક** સીઢી **અઙ** ભીંતે ટેકવીને ઉભી કરેલી છે. **અ** ભીંતનો પાયો છે. હવે **અબ**=૬' અને **અક**=૮' હોય તો સીઢીની લંબાઈ કેટલી ?+

× સેં. મી.=સેન્ટિમીટર

+ આ અને હવે પછીના આના જેવા પ્રશ્નોમાં પ્રત્યક્ષ લીટી માપીને સ્કેલની મદદથી જવાબ કહેવાનો હોય છે. અંતરપ્રમાણ સગવડ પ્રમાણે ગમે તે લેવું.

૧૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં **अब** અંતર ૯′ અને **अक** ૪૦′ હોય તો સીઢીની લંબાઈ કેટલી ?

૧૩. જેની લંબાઈ ૩૦ ફુટ છે, અને પહોળાઈ ૨૨ ફુટ છે, એવી ઓરડીના ભોંયતળીઆની આકૃતિ કાઢો અને તેના સામસામા બે ખુણાની વચ્ચેનું અંતર માપો.

[**સૂચના**—પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને પશ્ચિમ, પશ્ચિમ અને ઉત્તર, અને ઉત્તર તથા પૂર્વ, આ પાસપાસેની બબ્બે દિશાની વચ્ચે કાટખુણો હોય છે, એ વિદ્યાર્થીઓને કહીને પછી નીચેના પ્રશ્નો છોડવા કહેવું.]

૧૪. એક માણસ બરાબર પૂર્વમાં ૮·૨ માઇલ ગયો, અને ત્યાંથી બરાબર ઉત્તર તરફ ૫·૩ માઇલ ગયો; તો તે જ્યાંથી નીકળ્યો ત્યાંથી કેટલા માઇલ સીધો આઘો ગયો તે કહો.

૧૫. એક માણસ **अ** આગળથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૩ માઇલ જાય છે, પછી બરાબર ઉત્તર તરફ ૪ માઇલ જાય છે, અને ત્યાંથી બરાબર પૂર્વમાં ૩ માઇલ જઈને **ब** સ્થળે પહોંચે છે; તો **अ ब** વચ્ચે અંતર કેટલું ?

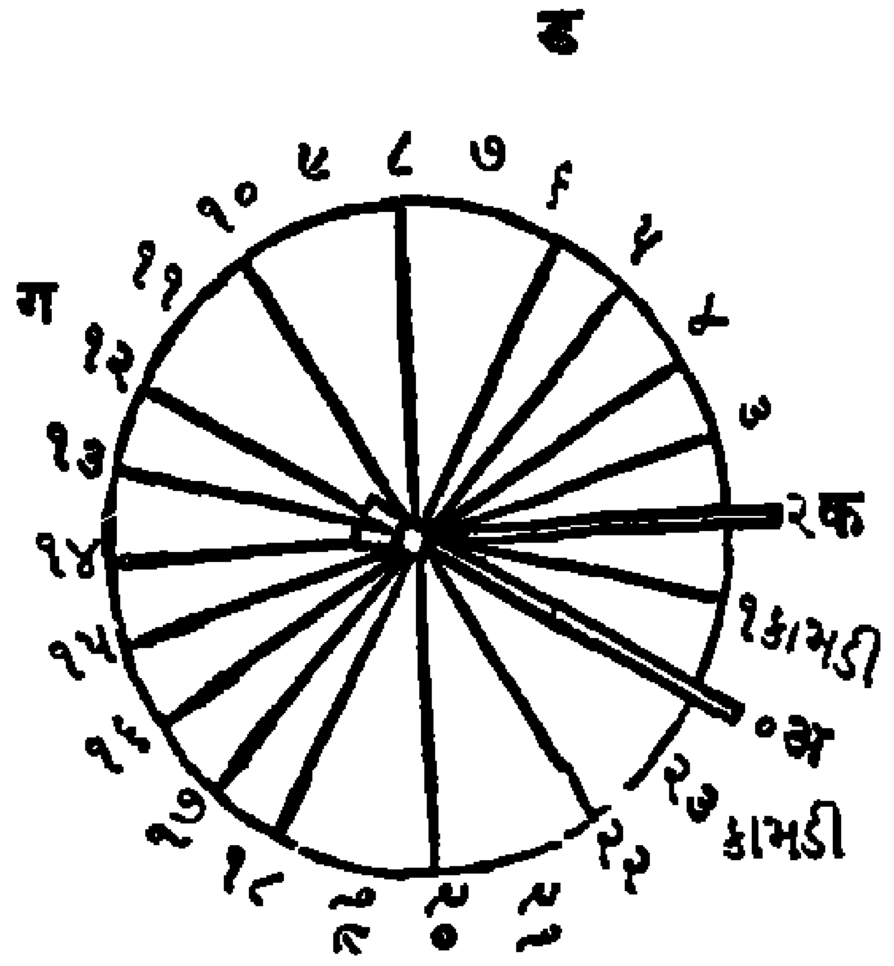
૧૬. **ब**, **अ**ની પૂર્વમાં ૯ માઇલ છે; **क**, **ब**ની ઉત્તરમાં ૧૨ માઇલ છે; **ड**, **क**ની પશ્ચિમમાં ૧૫ માઇલ છે; તો **अ**થી **ड** કેટલો આઘો છે?

૧૭. **अ**ની પૂર્વમાં **ब** ૩ માઇલ છે; **ब**ની દક્ષિણમાં **क** ૨ માઇલ છે; **क**ની ઇશાનમાં **ड** ૩ માઇલ છે; **ड**ની વાયવ્યમાં **ई** ૪ માઇલ છે; તો **अ**થી **ई** કેટલા માઇલ આઘો છે ?

૧૮. **अ**થી **ब** પૂર્વમાં છે, અને તે બે વચ્ચે ૪૦૦ ફુટનું અંતર છે; અને **क** સ્થળ **अ**ની બરાબર ઉત્તરમાં અને **ब**ની બરાબર વાયવ્યમાં છે; તો **क**નું **अ**થી અંતર કેટલું ?

ખુણો.

પાસે દોરેલી આકૃતિ જેવી આકૃતિ પાટીઆ પર અથવા મોટા કાગળ પર દોરો, અને તે કાગળ ટાંકણીઓથી પાટીઆ પર ચોઢો. વાંસની બે સાંકડી કામડીઓ લઈને તેમના એક છેડામાં કાણાં પાડો, અને કાણાંમાં તાર કે ટાંકણી ઘાલીને તેના છેડા વાળો, અને મજાગરા જેવું બનાવો. પછી આ બે કામડીઓથી બનેલો કંપાસ લઈને તેની નીચેની કામડી આકૃતિમાં દેખાડ્યા પ્રમાણે પાટીઆ પર આડી સજ્જડ બેસાડો. પછી ઉપલી કામડીનો જમણા હાથ



તરફનો એટલે છુટો છેડો ઘડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં જરા ખસેડો, એટલે મજાગરા પાસે (જ્યાં પેલી કામડીના છેડા તારથી જોડી દીધા છે ત્યાં) ખુણો થશે. તે છોકરાઓને દેખાડો અને "આ બે કામડીઓ એક બીજીને મળે છે ત્યાં આગળ જે ખુણો બન્યો છે તેને કોણ કે ખુણો કહે છે," એમ કહો. કોણ એટલે ખુણો. બધા ખુણા બે લીટી+ કે બે બાજુઓ મળવાથીજ બને છે. (પાસેના પદાર્થો બતાવીને તેમના ખુણા બતાવવા છોકરાઓને કહો. દાખલા તરીકે, મેજના ખુણા, ભીંતો એક બીજીને જ્યાં મળે છે તે ખુણા......વગેરે.) ઉપર કહેલી કામડીઓના છુટા છેડા વચ્ચેનું અંતર વધારો (ઉપલી કામડીનો છુટો છેડો ગોળ કુંડાળામાં ફેરવો), અને પહેલાંનાથી બમણો ખુણો બનાવો. પહેલાં

+ આ પુસ્તકમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ ઘણુંખરે ઠેકાણે સીધી લીટી એવો કરવાનો છે.

કરતાં હવે ખુણો મોટો થયો છે કે ? પહેલાં કામડીનો છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો હતો ? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? પહેલાંના ખુણા કરતાં આ ખુણો કેટલાગણો મોટો છે ? "બમણો." કામડીનો છેડો જરા જરા આગળ ખસેડીને ખુણો મોટો બનાવતા જાઓ, અને આ ખુણો કાટખુણા કરતાં ઓછો હોય તેજ વખતે તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો+ તે ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો છે એમ પૂછો. "મોટો છે" એમ છોકરા કહેશે. પછી કામડીથી બનેલો ખુણો વધારો, અને આ ખુણો જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ ન્યૂનતાપૂરક ખુણામાં શો ફેરફાર થતો જાય છે તે પૂછો. તે ખુણો નાનો નાનો થતો જાય છે એમ છોકરા કહેશે. પહેલો ખુણો કાટખુણા બરાબર થયો, એટલે તે ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ પૈકી મોટો કયો એમ પૂછો. બને સરખા છે એમ કહે, તો "એટલા મોટા ખુણાને **કાટખુણો** કહે છે" એમ કહો. કાટખુણાના બીજા દાખલા છોકરાઓને બતાવો, અને પછી તેવા બીજા દાખલા તેમની પાસે કઢાવો. કામડીનો છેડો આગળ ખસેડો, અને થએલો ખુણો કાટખુણાથી મોટો છે, અને તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો છે, એ કઢાવો. એ પ્રમાણે છેડો આગળ ખસેડતાં ખસેડતાં, પહેલો ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ બે વચ્ચે પડતો તફાવત છોકરા પાસેથીજ કઢાવો. કામડીનો છેડો ग અક્ષર પાસે જાય એટલે થએલો ખુણો કાટખુણાથી કેટલો મોટો છે એમ પૂછો. કામડીનો છેડો ख સ્થળે આવતાં સુધીમાં જો એક કાટખુણો થાય છે, તો છેડો તેટલોજ આગળ ગયાથી કેટલા કાટખુણા જેવડો ખુણો થશે ?

એક કાટખુણો કરવા માટે વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને બીજી કામડીના છેડાને ફરવું પડે છે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી

+ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ શબ્દનો ઉપયોગ આ વખતે છોકરાઓ સાથે બોલવામાં કરવો નહિ, પણ તે ખુણો હાથે દેખાડવો. ઉપલો શબ્દ કેવળ શિક્ષકો માટે યોજેલો છે.

અર્ધો કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી દોઢ કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી બે કાટખુણા થશે ?...વગેરે.

સૂચના—હવે પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં વર્તુળ, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, પરિઘ, ત્રિજ્યા, કૌંસ, જ્યા, વગેરે સત્તાઓના માહીતી છોકરાઓને આપવી. આ પારિભાષિક શબ્દોની વ્યાખ્યાઓ આગળથી મોઢે કરાવી લેવાની જરૂર નથી. છોકરાઓ તેમનો અર્થ સમજે, અને તે તે આકૃતિઓને તેમનાં ખરાં નામ વડે બતાવી શકે, એટલે બસ છે.

વ્યાખ્યા.

જે આકૃતિની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી દર્શાવાય છે, અને જેમાં એક એવું બિંદુ હોય છે કે તેમાંથી તે વક્ર લીટી સુધી ગમે તેટલી સીધી લીટીઓ દોરી હોય તોપણ તે બધી સરખી થાય છે, તે આકૃતિને **વર્તુળ** કહે છે.

વર્તુળની હદ દેખાડનાર વક્ર લીટીને તેનો **પરિઘ** કહે છે.

પરિઘના કોઈ પણ ભાગને **કૌંસ** કહે છે.

વર્તુળના જે બિંદુમાંથી પરિઘ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓ બધી સરખી હોય છે તેને વર્તુળનું **મધ્યબિંદુ** કહે છે.

મધ્યબિંદુથી પરિઘ સુધી દોરેલી કોઈ પણ સીધી લીટીને **ત્રિજ્યા** કહે છે.

ખુણાઓનું નાનામોટાપણું.

ઉપલા પ્રયોગમાંની કામડીથી અર્ધો કાટખુણો કરો. પછી બંને કામડીઓને છેડે બીજી કામડીઓ બાંધીને ખુણાની બાજુઓ લાંબી કરો. આ ખુણો પહેલાંના કરતાં મોટો છે કે ? પહેલાંનો ખુણો કેવડો છે ? વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? "**એક અષ્ટમાંશ.**" આ ઉપરથી આ ખુણો પહેલાંના ખુણા જેવડોજ છે એમ સમજાય છે.

આ ખુણો મોટો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ? "છેડો આગળ ખસેડવો જોઈએ." ખુણાની બાજુ વધારે લાંબી કરવાથી ખુણો મોટો થશે કે? "ના."

આ (પાસેની આકૃતિમાં બતાવેલી) કામડીઓ અર્ધો કાટખુણો કરે છે. તેમનો જમણી બાજુનો અર્ધો ભાગ કાપી નાખ્યો હોય, તો ખુણામાં કંઈ તફાવત પડશે કે? " ના." આ ખુણો નાનો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ? ખુણો નાનો કરી જુઓ અને પછી સવાલનો જવાબ આપો. "ફરતી કામડીનો છેડો પાછળ ખસેડવો જોઈએ."

પરિમાણમાં સરખા છતાં પણ જેમની બાજુઓ નાની મોટી છે એવા બે ખુણા પાટીઆ પર દોરો, અને તે પૈકી કયો ખુણો મોટો છે તે છોકરાઓને પૂછો; એટલે લાંબી બાજુઓવાળો ખુણો મોટો છે એમ છોકરા કહેશે. પછી ખુણાની એક બાજુ પર વિભાજકની એક બાજુ (તેમના શિરોબિંદુઓ એક બીજા પર આવે એવી રીતે) મૂકીને તે ખુણા જેટલો ખુણો થતા સુધી વિભાજકની બીજી બાજુ ખસેડો. પછી આ વિભાજક બીજા ખુણા પર તેવીજ રીતે મૂકીને બંને ખુણા સરખા છે એમ બતાવો, અથવા આ વિભાજક, ઉપર કહેલા (૨૧મા પાના પરના) ચક્ર ઉપર મૂકીને તેથી વર્તુળનો કેટલામો ભાગ દર્શાવાય છે તે જોવાને છોકરાઓને કહો. પછી વિભાજક બીજા ખુણા પર મૂકીને પહેલાંની માફકજ કૃતિ કરો. બે ખુણામાં કંઈ તફાવત છે કે? " ના. "

એકથી બીજો જરા મોટો હોય એવા બે ખુણા લો. તે પૈકી નાના ખુણાની બાજુઓ મોટા ખુણાની બાજુઓ કરતાં લાંબી લો. આ બેમાં મોટો ખુણો કયો? જેની બાજુ લાંબી છે તે ખુણો મોટો એમ કદાચ છોકરા કહે. તો પછી ઉપર પ્રમાણે કૃતિ કરીને ખરેખરો મોટો ખુણો કયો તે છોકરાઓની પાસે કઢાવો.

આ ઉપરથી ખુણાઓનું નાનામોટાપણું શા પર આધાર રાખે છે, તે સમજાય છે? તે બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે કે? "ના."

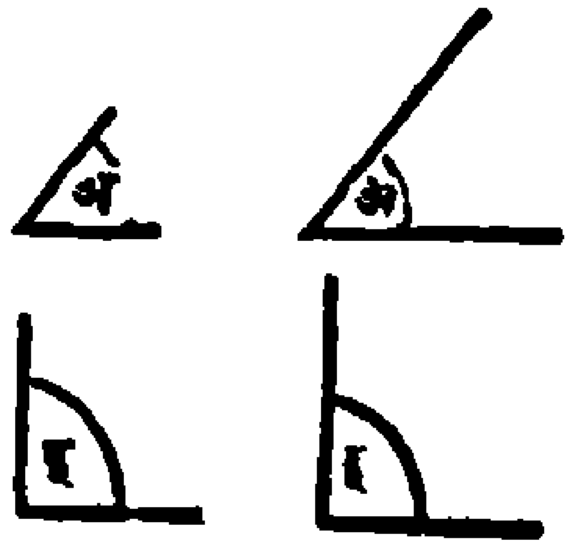
अबक ખુણો બનાવવા માટે **बक**નો **ब** છેડો વર્તુળના १/२ ભાગમાં થઈ જતા સુધી ફેરવવો પડયો. તો તેવડોજ બીજો **डईफ** ખુણો કરવા માટે **ईफ**નો **फ** છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને જતા સુધી ફેરવવો પડશે? આ ઉપરથી બે ખુણા સરખા છે એમ ક્યારે કહેવાય, એ વિષે કોઈ નિયમ કહી શકાય છે કે?

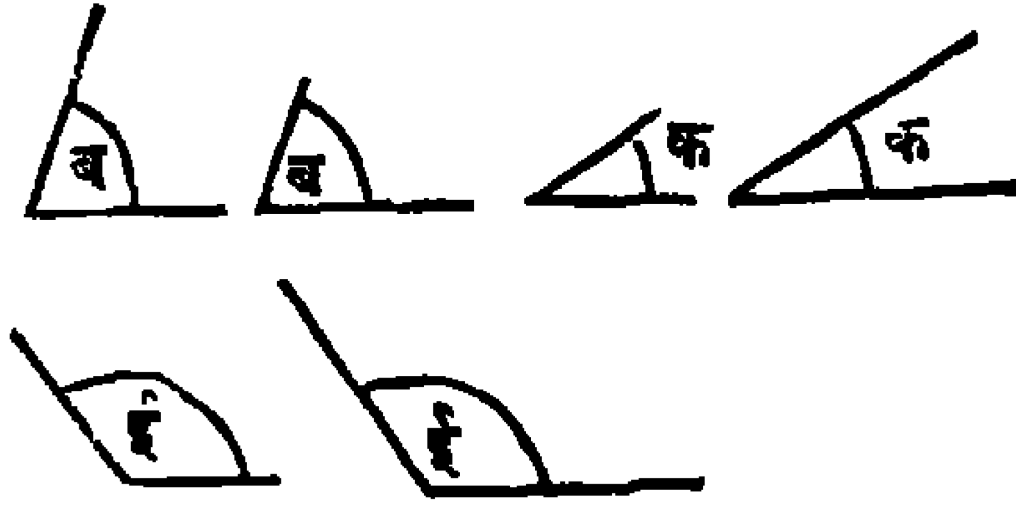
"જ્યારે બે ખુણાની બાજુઓ વર્તુળના સરખા ભાગમાં થઈને ફરેલી હોય છે, ત્યારે તે ખુણા સરખા છે એમ કહેવાય છે."

ખુણાઓનું સરખાપણું અથવા નાનામોટાપણું નક્કી કરવાની રીત:—

એક ખુણો ઉપાડીને બીજા પર મૂકયો હોય, ત્યારે જો તે બીજા પર બરાબર આવી રહે, એટલે જો તે બંનેનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે તો તે સરખા છે એમ જાણવું.

ખુણાનું નાનામોટાપણું, જે લીટીઓ, કામડીઓ, કે બાજુઓ મળવાથી તે ખુણો બને છે, તેમની લંબાઈ પર આધાર ન રાખતાં તેમના ઓછાવત્તા પરિવર્તન પર (કુંડાળામાં ફરવા પર) આધાર રાખે છે. ખુણાની બાજુઓની વચ્ચે જે જગા હોય છે, તેના નાનામોટાપણાની સાથે ખુણાના સરખાપણાનો કે નાનામોટાપણાનો બીલકુલ સંબંધ નથી, એ ધ્યાનમાં રાખવું.





દાખલા તરીકે, આપેલી આકૃતિઓમાં સમાન અક્ષરે બતાવેલા ખુણા સરખા છે એમ જાણવું.

કાટખુણો.

એક કાગળનો ચોરસ લઈને તેને બરાબર મધ્ય ભાગ ઉપર આડો વાળો. પડેલી ગડીની ધારના બે ભાગો એક બીજા પર બરાબર આવે એવી રીતે ફરીથી કાગળને મધ્ય ભાગ પર વાળો. એવી રીતે વાળવાથી જે ખુણો થાય છે, તે પહેલાં દેખાડેલા કાટખુણાની બરાબર હોય છે, એ છોકરાઓને બતાવો. પછી એક ગડી ઉઘાડીને બે કાટખુણા દેખાડો; અને પછી બીજી ગડી ઉઘાડીને કાગળની વચ્ચોવચ્ચ બનેલા ચાર કાટખુણા દેખાડો. નિશાળમાંની વસ્તુઓના ખુણા બતાવીને તેમાંના કયા ખુણા કાટખુણાની બરાબર છે, અને કયા કાટખુણાથી નાના કે મોટા છે, એ પૂછો.

કાગળનો વર્તુળાકાર કકડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો, અને આ તથા પહેલાંના પ્રયોગ પરથી કાટખુણાની વ્યાખ્યા નીચે આપ્યા પ્રમાણે છોકરાઓને મોઢેથી કહાવો.

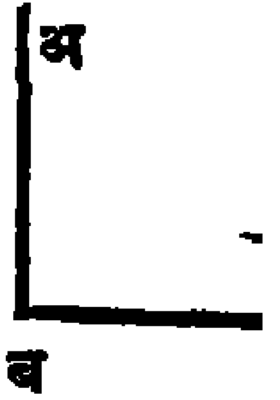
કાટખુણાની વ્યાખ્યા—એક લીટી પર બીજી લીટી પડી હોય ત્યારે તે (બીજી) લીટીની બંને બાજુના ખુણા સરખા થાય, તો તેમાંથી દરેક ખુણાને **કાટખુણો** કહે છે.

અથવા, ખુણાની બાજુઓના છેડાઓની વચ્ચે વર્તુળના એક ચતુર્થાંશની બરાબર અંતર હોય છે (ખુણાની બાજુઓના બે છેડા

મળીને વર્તુળના એક ચતુર્થાંશમાં થઈને ફરે છે) ત્યારે કાટખુણે થાય છે.

ઉપર કાટખુણાનો જે ખ્યાલ આપ્યો છે, તે પરથી બધા કાટખુણ સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

ચાર પાંચ કાટખુણા લો. તેમનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એ એક પર બરાબર પડે, એવી રીતે તેમને એક બીજા પર મૂકો; એટ સઘળા કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.



એક લીટી બીજીની સાથે કાટખુણો કરતી હોય, તો તે એમાંની દરેક, બીજી પર **લંબ** છે એમ કહેવાય છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં **अब**, **बक** પર લંબ છે, અને **बक**, **अब** પર લંબ છે.

કાગળ વાળીને આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવાની રીત:

પ્રયોગ—કાગળનો ગમે તેટલા કદનો કકડો લો. તેની ગ તેમ ગડી વાળો. આ ગડીની ધારના ભાગ એક બીજા ' બરાબર પડે એવી રીતે ફરીથી કાગળ વાળો. કાગળ ઉઘાડી જુએ પહેલી ગડીની સાથે બીજી ગડી કેટલો મોટો ખુણો કરે છે? "કાટખુણો આ પરથી કાગળ વાળીને કોઈ લીટી પર લંબ કાઢવા માટે ત કઈ રીત શીખ્યા? "......"

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લં કાઢવા માટે ઉપલી રીતનો ઉપયોગ તમે શી રીતે કરશો? "આપે બિંદુમાંથી કાગળ એવી રીતે વાળવો કે વાળવાથી પડતા આપે લીટીના ભાગ એક બીજા પર પડી રહે."

બીજી રીત:—अब આપેલી લીટી છે. **क** આપેલું બિંદુ ૬ **अब** ઉપર કાગળ વાળો. એમ વાળતાં **क** બિંદુ **अब**ની બી બાજુના કાગળના ભાગને જ્યાં સ્પર્શ કરે ત્યાં પેન્સિલથી, કે **क** વિભાજકની અણી ખોસીને, **ड** બિંદુ કરો; અને **कड** સાંધો.

પ્રશ્ન.

૧. કાગળના કકડા પર એક બિંદુ લો, અને કાગળ વાળીને તે બિંદુ આગળ કાટખુણો બનાવો. એવા કાટખુણા બધા મળીને કેટલા થાય છે? "ચાર."

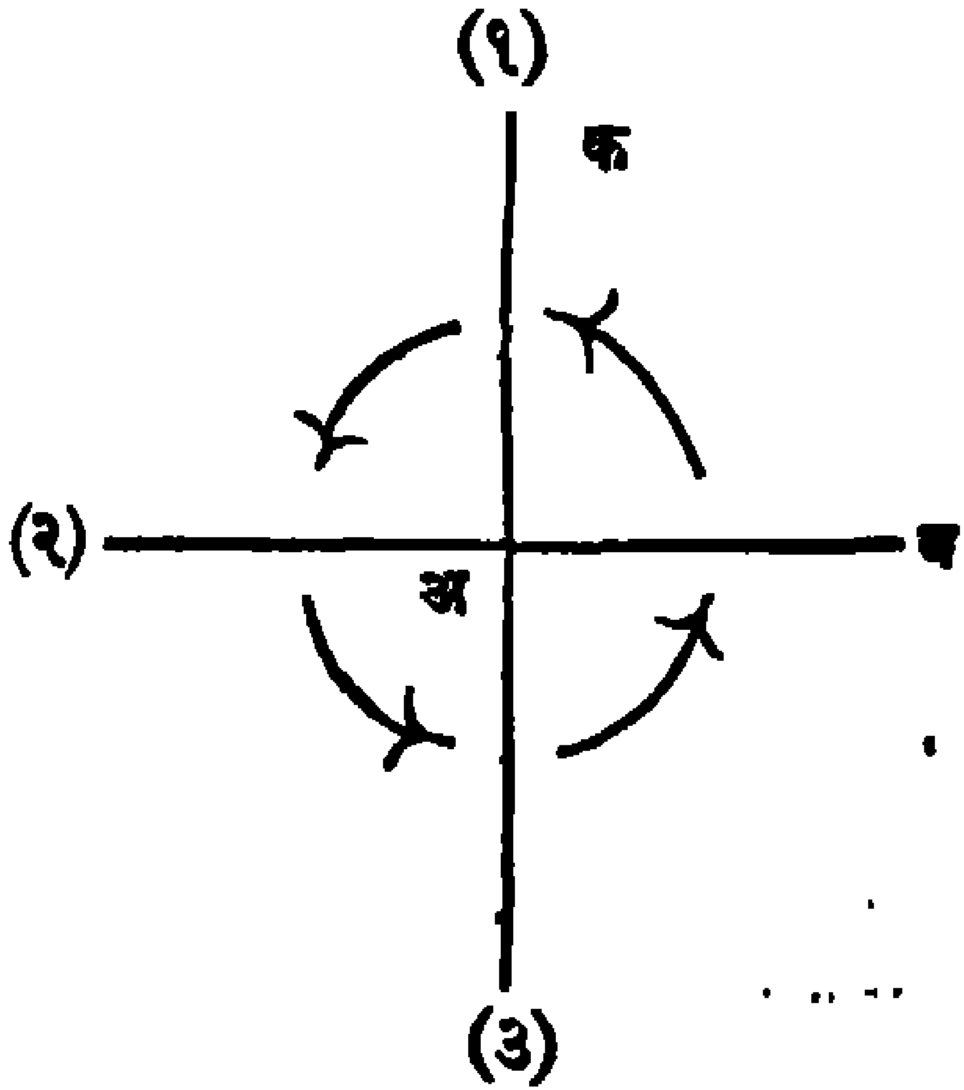
સૂચના—ઘડિઆળ સંબંધી નીચેના બધા પ્રશ્નોમાં ઘડિઆળના બને કાંટા સ્વતંત્ર છે, એટલે એક કાંટો ફેરવ્યો હોય તોપણ બીજો ફરતો નથી, એમ ધારવું.

૨. ઘડિઆળના બંને કાંટા ત્રણ પર છે; તેમાંથી એક કાંટો ઉલટો ફેરવીને ૧૨ પર આણ્યો હોય, તો ત બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થશે, તે કાટખુણાથી નાનો થશે કે મોટો?

૩. એક કાંટો ૯ પર અને બીજો બરાબર ૩ પર છે, તો તે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે?

બિંદુની આસપાસ થતા ખુણાઓનો સરવાળો.

પાસેની આકૃતિમાં **अक** સળીનો છેડો (૧)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જો **अख, अक** વચ્ચે એક કાટખુણો થાય, અને **अक**નો છેડો (૨)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જો **अख, अक** વચ્ચ બે કાટખુણા થાય, તો **अक** (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં જાય ત્યારે **अख, अक** વચ્ચે જે ખુણો થાય તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય? **अक** સળી (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાંથી નીકળીને બાણની દિશામાં જઈ આખરે **अख** પર પડે તો **अक**સળી જે ખુણામાં થઈને ફરી, તે ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે?



પહેલાં કહ્યા પ્રમાણે કાગળ વાળીને કાટખુણો તૈયાર કરો. જે બિંદુમાં બંને સળો એક બીજાને છેદે છે, તે બિંદુની પાસે કેટલા કાટખુણા થાય છે?

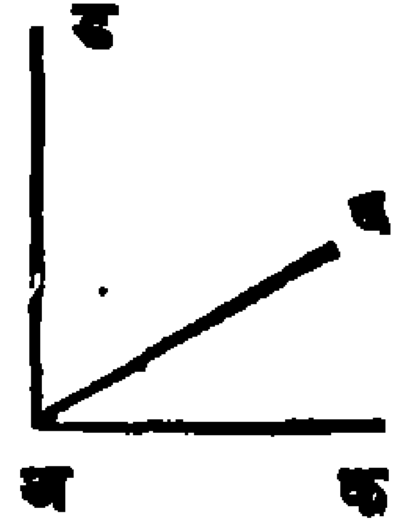
ઉપલા બે પ્રયોગ ઉપરથી, એક લીટી પોતાના એક છેડાના બિંદુની આસપાસ ફરતી ફરતી એક પ્રદક્ષિણા કરીને અસલની જગાએ આવે છે, એટલે તે કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે? "તે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે."

એક બિંદુમાંથી જુદી જુદી દિશાઓમાં લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની વચ્ચે જે ખુણા થાય છે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમે શું શીખ્યા?

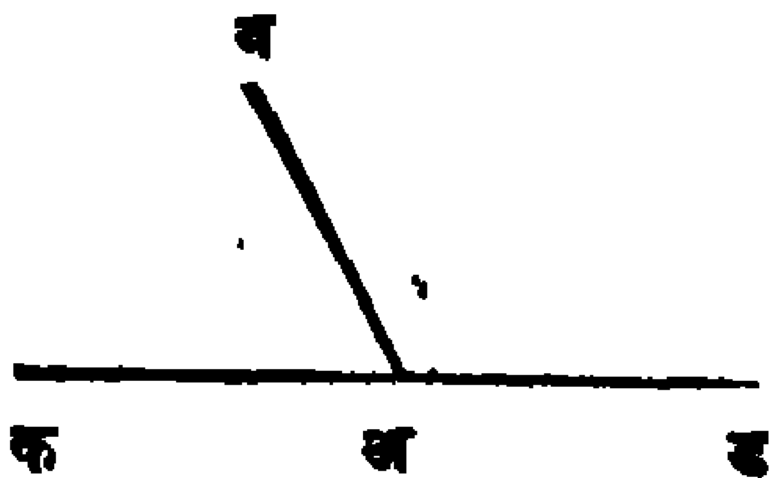
વ્યાખ્યા.

કાટખુણાથી નાના ખુણાને **સાંકડો ખુણો** કહે છે.

કાટખુણાથી મોટા ખુણાને **પહોળો ખુણો** કહે છે.



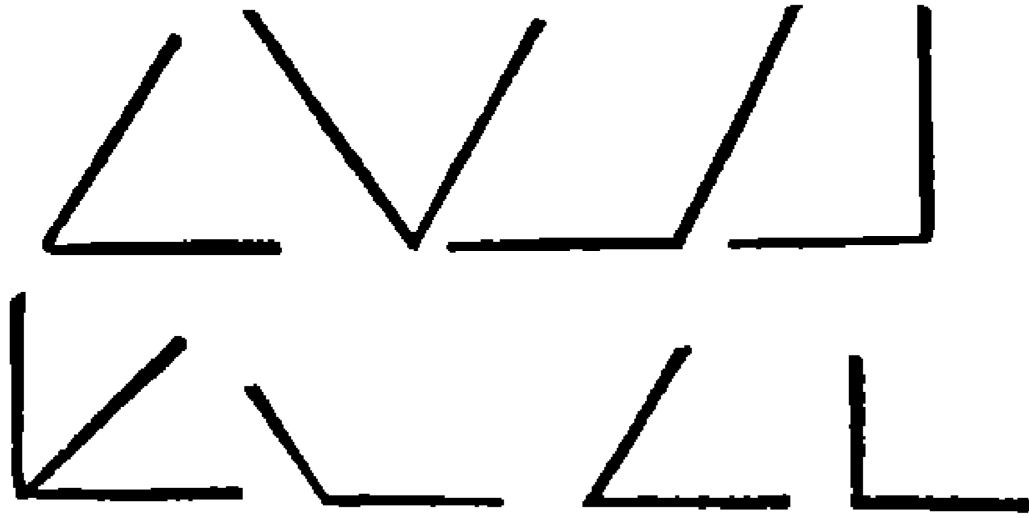
જે બે ખુણા મળીને એક કાટખુણો બને છે તેમને એક બીજાના **કોટિખુણા** કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં **डअब** અને **बअक** એક બીજાના કોટિખુણા છે.



જે બે ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, તેમને એક બીજાના **ન્યૂનતાપૂરક** ખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં **कअब** અને **बअड** એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા છે.

ખુણાના પ્રકાર.

નીચેના ખુણામાંથી સાંકડા ખુણા કયા, પહોળા ખુણા કયા, અને કાટખુણા કયા તે કહેા.

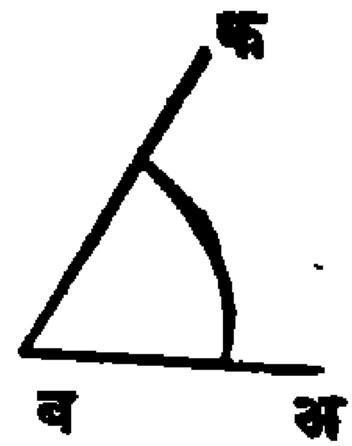


નીચે કેટલીક ખુણાઓની જોડો આપી છે, તેમાંથી કાટિખુણા કયા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા તે કહેા.



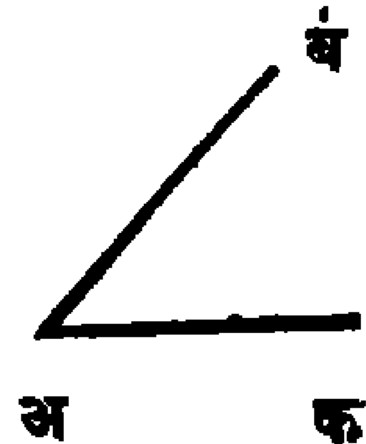
ખુણાઓના સંબંધમાં પરિભાષા.

જે બે લીટીઓ મળીને ખુણેા થાય છે, તેમને તે ખુણાના **ભુજ** કે **બાજુ** કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં **बक, बअ** તે ખુણાના **ભુજ** છે.



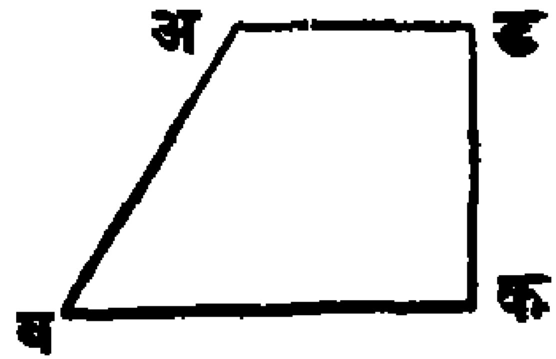
ખુણાના ભુજ એક બીજાને જે બિંદુમાં મળે છે, તે બિંદુને તે ખુણાનું **શિરેાબિંદુ** કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં **ब** શિરેાબિંદુ છે.

ખુણાનું નામ કહેતી વખતે શિરેાબિંદુની પાસેનેા અક્ષર વચ્ચે, અને તેની બે બાજુએ ખુણાની બે બાજુના છેડાની પાસેના અક્ષર મૂકવાનેા રિવાજ છે. દાખલા તરીકે, પાસે આપેલા ખુણાને **बअक** કે **कअब** ખુણેા કહે છે.



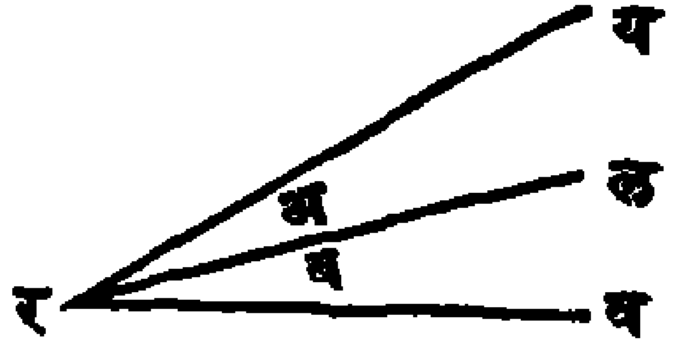
કોઈ પણ આકૃતિનું નામ આપવાની સામાન્ય રીત એવી છે, કે તેના કોઈ પણ એક ખુણાથી કે છેડાથી શરૂ કરીને તેની આસપાસ ડાબી બાજુએ થઈને પ્રદક્ષિણા કરતાં, પ્રદક્ષિણા પુરી થતા સુધી તેના જે ખુણા ક્રમે આવે ત ક્રમ તેના ખુણા પાસના અક્ષરો ઉચ્ચારવા. તેથી બધી બાજુએ ઘેરાએલી આકૃતિઓનાં નામ ઘણી રીતે આપી શકાય છે.

દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિ **अबकड, बकडअ, कडअब, डअबक**, આ ચાર નામથી દર્શાવી શકાય છે. પણ ખુણાને ત્રીજી બાજુએ હદ હોતી નથી, તેથી તેની બાજુના છેડાનાં નામ દઈને તે બેજ રીતે દર્શાવી શકાય છે.



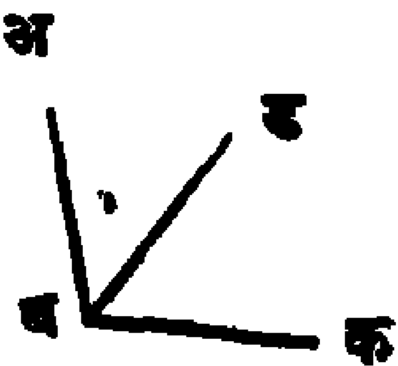
આકૃતિની આસપાસ જમણી બાજુએથી પ્રદક્ષિણા કરીને પણ કોઈ કોઈ વખત આકૃતિ દર્શાવાય છે. દાખલા તરીકે, ઉપલી આકૃતિ **अडकब, डकबअ, कबअड, बअडक**, આ ચાર નામમાંથી ગમે તે નામથી દર્શાવી શકાય.

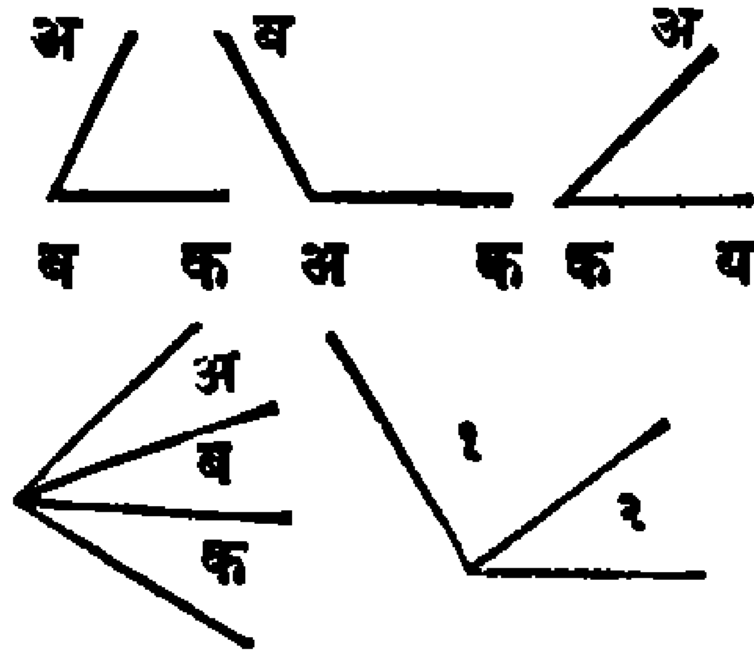
કોઈ કોઈ વખત ખુણામાં લખેલા ગમે તે કોઈ એક અક્ષર વડે ખુણો દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં **अ** ખુણો એટલે **यरल** ખુણો, અને **ब** ખુણો એટલે **लरव** ખુણો.



'ખુણો' એ શબ્દને બદલે ∠ આ ચિહ્ન કરવાનો રિવાજ છે; જેમકે ∠**अबक** એટલે **अबक** ખુણો; ∠**अ** એટલે **अ** ખુણો; ∠**અ** એટલે **અ** ખુણો............વગેરે.

• પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે જ્યારે બે ખુણા એક બીજાને અડકેલા હોય ત્યારે તેમને **પાસપાસેના** કે **પાસેના** ખુણા કહે છે. આ આકૃતિમાં **अबड** અને **डबक**, એ પાસપાસેના ખુણા છે. **अबक** ખુણાને **अबड** અને **डबक**નો સરવાળો કહે છે.





ઉપલી આકૃતિઓમાં ખુણા આપ્યા છે, તેમને અક્ષરોથી દર્શાવો. તેમાં કયો ખુણો કયા ખુણાને અડકેલો છે તે કહો.

ખુણાઓની સરખામણી.

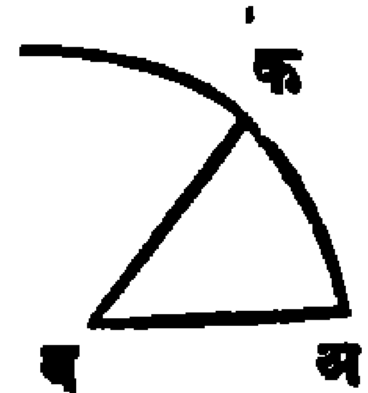
બે ખુણામાંથી કયો ખુણો મોટો છે તે જોવાની રીત.

એક ખુણાનો છાપો* ટિશુપેપરથી, ટ્રેસિંગપેપરથી, કે તેલીઆ કાગળથી લેવો; અથવા તે ખુણા જેવડો ખુણો દોરીને† તે કાપી

*છાપો કે છાપ—આકૃતિ પર ટિશુપેપર રાખીને કરેલી નકલને છાપો કે છાપ કહે છે.

† આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો દોરવાની રીતઃ—જો अबक ખુણાની પ્રતિમા લેવી હોય તો તે ખુણા નીચે બીજો કાગળ રાખવો; અને ખુણાનાં अ, ब, क, બિંદુઓમાં ટાંકણી ખોસવી. નીચેના કાગળમાં જે કાણાં પડે તેમને અનુક્રમે अ', ब', क', નામ આપીને अ' ब', ब' क' સાંધવાં. अ'ब'क' ખુણો अबक ખુણા બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

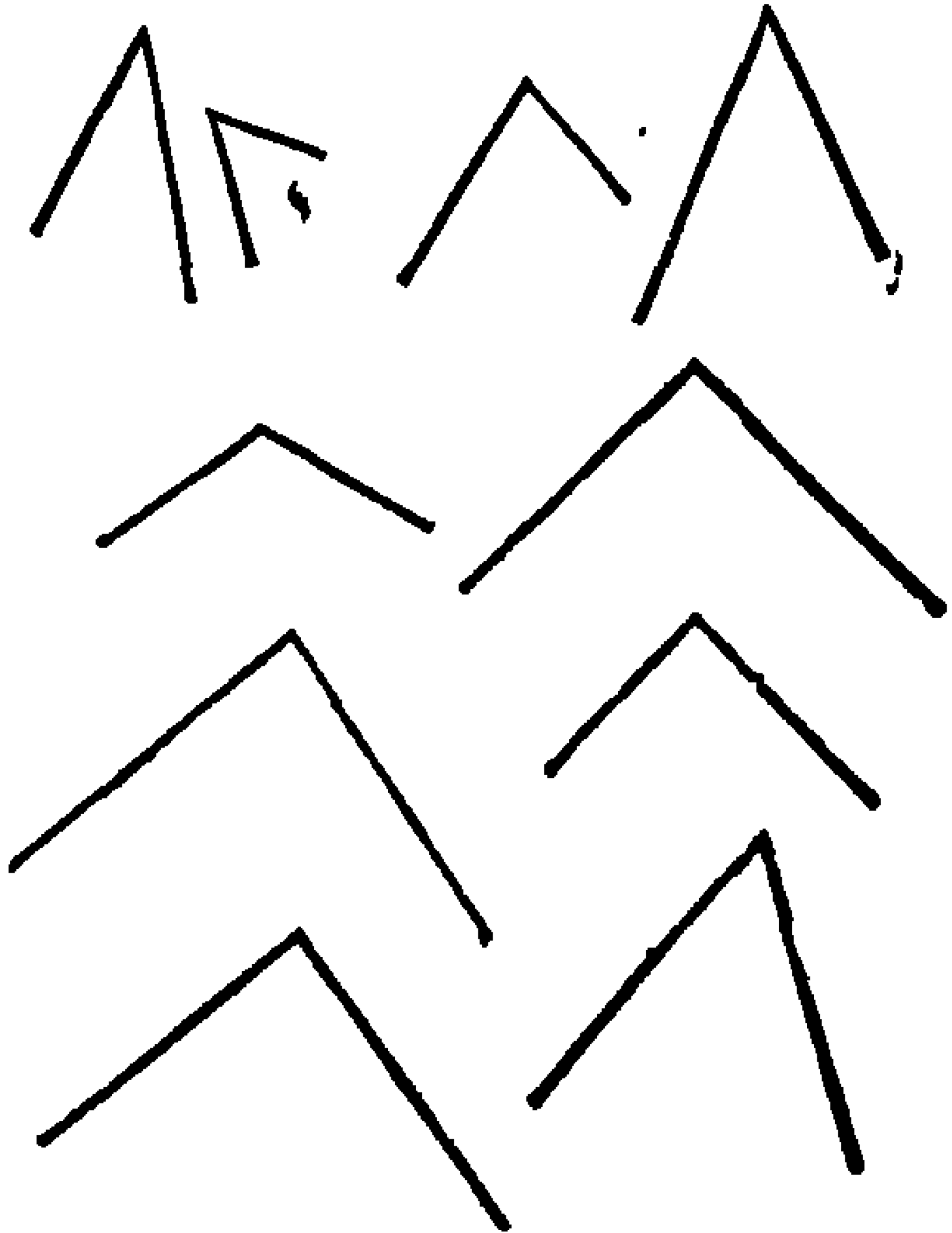
કોણમાપકની મદદ વગર આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કાઢવાની બીજી રીતઃ—આપેલો ખુણો अबक, बक લીટીના પરિવર્તનથી બનેલો છે. ब મધ્યબિંદુ ધારીને बअ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના ફક્ત अक ભાગમાં થઈને बक ફરી છે માટે अबक જેટલો ખુણો કાઢવો હોય તો સરખા વર્તુળના તેટલા ભાગમાં થઈને ખુણાનો ભુજ ફેરવ્યો એટલે



કાઢવો. પછી તે ખુણો બીજા ખુણા પર મૂકીને કયો ખુણો મોટો છે તે જોવું. એક ખુણાને બીજા પર મૂકતી વખતે શિરોબિંદુ શિરોબિંદુ પર અને એક ખુણાનો એક ભુજ બીજા ખુણાના એક ભુજ પર રાખવો. પછી ઉપલા ખુણાનો બીજો ભુજ નીચેના ખુણાની અંદર કે બહાર પડે તે પ્રમાણે ઉપલો ખુણો નાનો કે મોટો તે નક્કી કરવું.

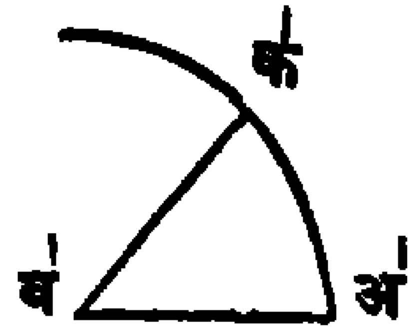
પાસે કેટલીક ખુણાની જોડો આપેલી છે, તેમાંથી દરેક જોડમાંનો કયો ખુણો મોટો અને કયો નાનો તે નક્કી કરો.

(પહેલાં આપેલા ખુણામાંથી કયો મોટો છે તે અટકળથી નક્કી કરો, અને પછી ઉપર આપેલી રીતે સરખામણી કરીને તમારો જવાબ ખરો છે કે નહિ તે જુઓ.)



નાની મોટી બાજુવાળા ચારપાંચ કાટખુણા હાથે દોરો; તેમ જ સાંકડા ખુણા અને પહોળા ખુણા દોરો.

બસ. તેટલા માટે बअ જેટલી બીજી ब'अ' લીટી દોરો. ब' મધ્યબિંદુ ધારીને ब'अ' ત્રિજ્યાએ બીજું વર્તુળ દોરો. अक કૌંસનું અંતર વિભાજકથી આપો, અને તે વિભાજક વડે તેટલોજ મોટો ભાગ બીજા વર્તુળમાંથી



ખુણાના વિભાગ અને ખુણા માપવાની રીત.

જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય એવો કાગળનો કકડો લઈને કાટખુણાનો એક ભુજ બીજા પર પડે એવી રીતે તેને વાળો. કાટખુણાના કેટલા ભાગ પડ્યા? "બે." બે ભાગ સરખા છે કે નાના મોટા? "સરખા." એમાંથી દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? "અર્ધો." આ ખુણાને ફરીથી વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? "એક ચતુર્થાંશ."

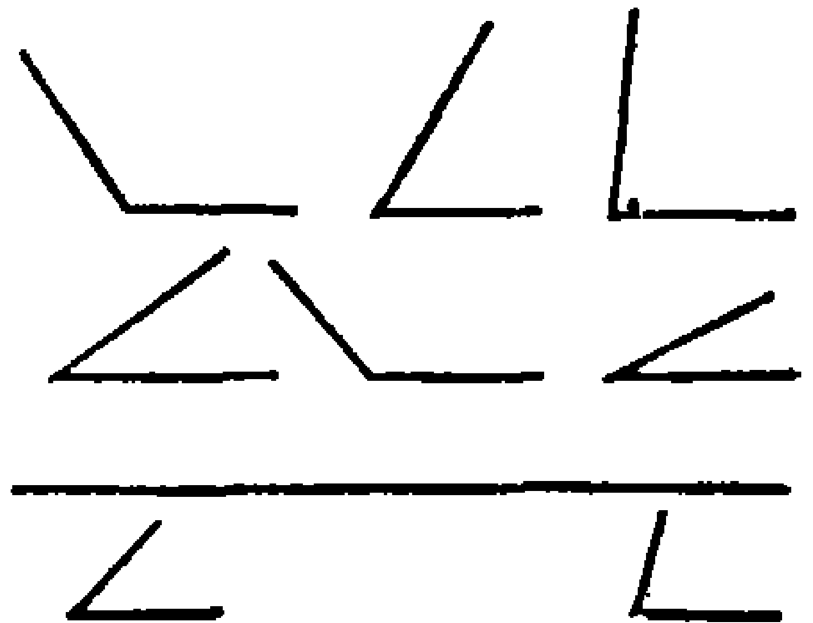
જેમ ફુટના બાર સરખા ભાગ કરીને દરેક ભાગને ઇંચ એ નામ આપ્યું છે, તેમ એક કાટખુણાના ૯૦ સરખા ભાગ કલ્પીને દરેક ભાગને અંશ એવું નામ આપેલું છે. (કોણમાપક પરના કાટખુણાના ભાગ દેખાડવા.)

ખુણાનું નાનામોટાપણું ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના વર્તુળભાગના નાનામોટાપણા પર આધાર રાખે છે. એટલા માટે વર્તુળના પરિઘના ૩૬૦ અંશ કે સરખા ભાગ કરીને આ દરેક ભાગ ઉપરથી બીજા બધા ખુણા માપવાના રિવાજ છે. ખુણા માપવાનું અંશથી મોટું માપ

કાપી કાઢો. ધારો કે એ ભાગ अक છે. बक સાંધો. अबक ખુણો આપેલા ખુણાની બરાબર હોવો જોઈએ એ ખુલ્લું છે.

નીચે આપેલા ખુણા જેવડા ખુણા દોરો.

પાસે આપેલી લીટી જેવડી લીટી દોરીને તેના બે છેડા આગળ, આપેલા બે ખુણા જેવડા ખુણા કરો.



કાટખુણો છે. [પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પ્રદક્ષિણા કરતી વખતે રોજ વર્તુળના ૩૬૦મા ભાગમાં થઈને જાય છે; આ ઉપરથી વર્તુળનો ૩૬૦મો ભાગ ખુણો માપવા માટે લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હોય એમ લાગે છે.]

['અંશ' એ શબ્દને ઠેકાણે ° આ ચિહ્ન વાપરે છે; જેમકેઃ-૧૦° એટલે દસ અશ; ૨૨° એટલે ૨૨ અંશ.]

પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણામાં ૯૦ અંશ હોય છે; તો અર્ધા કાટખુણામાં કેટલા? પા કાટખુણામાં કેટલા? ૧/૩ કાટખુણામાં કેટલા?

૨. ઘડિઆળમાં બરાબર એક વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો હોય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ હોય છે? તે ખુણામાં અશ કેટલા?

૩. ઘડિઆળમાં બરાબર બે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થાય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા?

૪. ઘડિઆળમાં ૫, ૬, ૭, ૮, ૯......વગેરે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે?

૫. નીચેની દિશાઓની વચ્ચે કેટલા અંશના ખુણા થાય છે તે કહોઃ—પૂર્વ અને પશ્ચિમ, પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને નૈઋત્ય, પશ્ચિમ અને ઇશાન, વાયવ્ય અને અગ્નિ, ઉત્તર અને ઇશાન-પૂર્વ,* વાયવ્ય-ઉત્તર અને પૂર્વ......વગેરે.

ખુણા માપવાની રીત.

કોણમાપકના ઉપયોગના સંબંધમાં સુચના—જે ખુણો માપવો હોય તેના શિરોબિંદુ પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ (એટલે સીધી ધારના મધ્યભાગ પરની ખાંચ) રાખીને ખુણાની એક બાજુ

* ઈશાન ને પૂર્વની બરાબર વચ્ચેની દિશા.

પર કોણમાપકની એક બાજુ મૂકવી; અને ખુણાની બીજી બાજુ કોણમાપકના જે અંશની નિશાની નીચે થઈ જતી હોય, તેટલા અંશનો તે ખુણો છે એમ સમજવું.

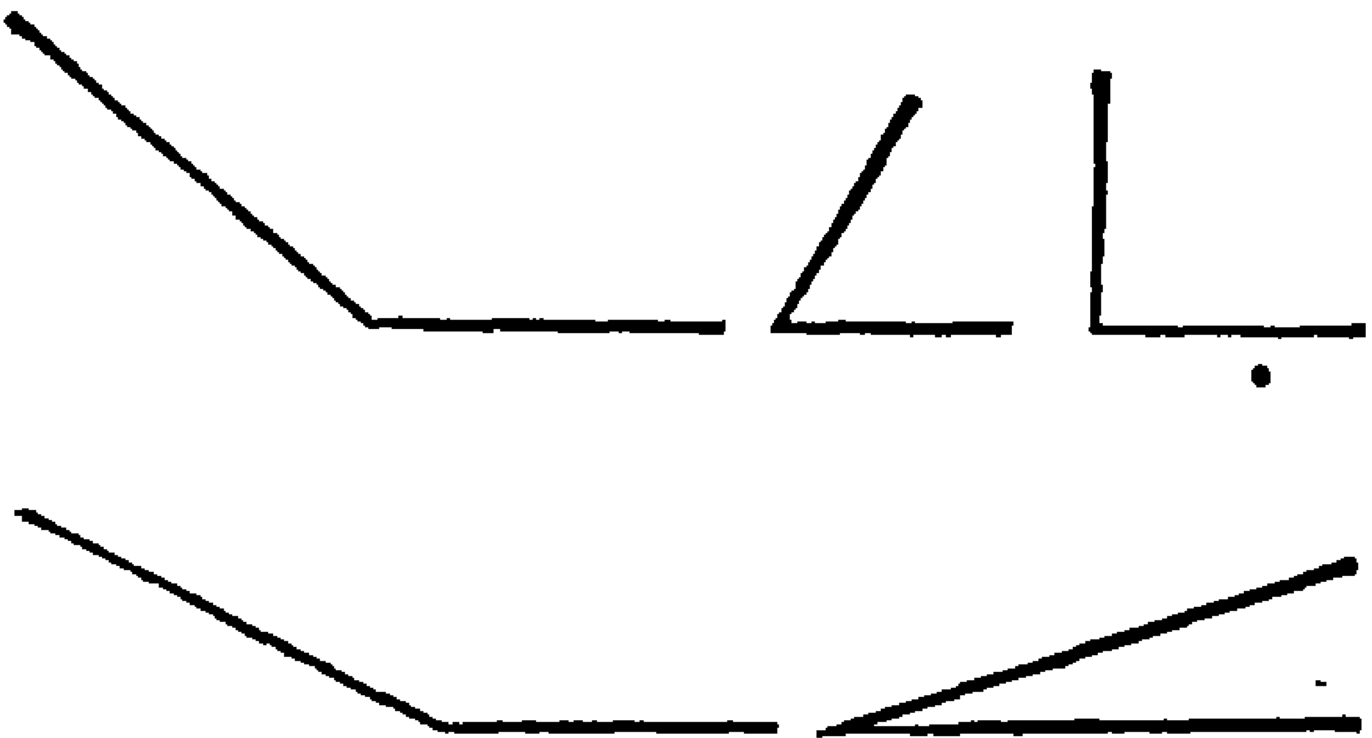
ખુણાની ડાબી બાજુ પર કોણમાપકની ડાબી બાજુ મૂકી હોય, તો ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ જાણવા; અને ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકી હોય, તો જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ સમજવા. તેમ છતાં પણ કયા આંકડાનો ઉપયોગ કરવો એ વિષે ગુચવણ ન પડે એટલા માટે, ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકવાની હંમેશ ટેવ રાખવી એ સારૂં છે.

ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો છે, તે પહેલાં અટકળથી જોવું; એટલે ખુણો માપતાં કોણમાપક પરના આંકડા ખોટી બાજુએથી ગણવામાં આવ્યા હોય, તો થએલી ભૂલ જણાઈ આવશે.

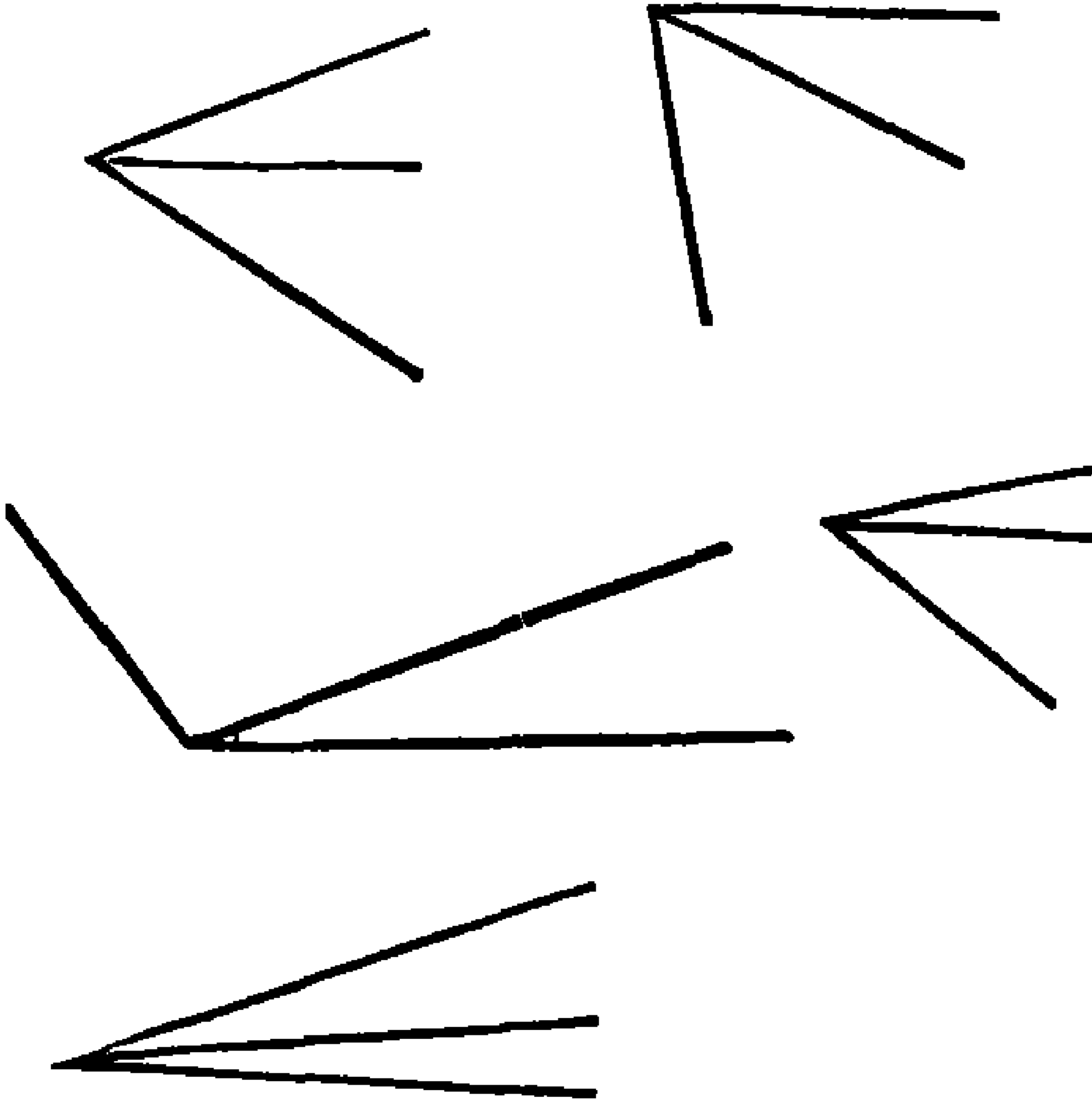
પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણમાપના ખુણા કેટલા અંશના છે તે જુઓ.

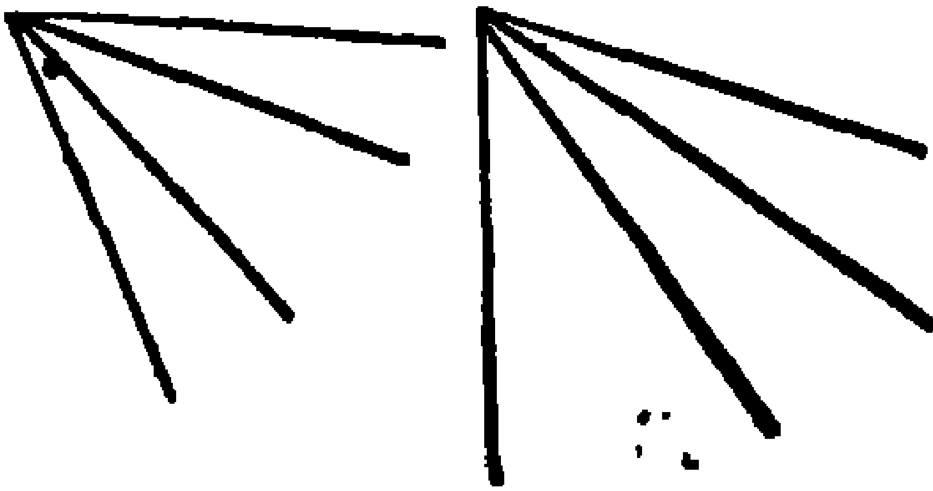
૨. નીચે આપેલા ખુણા માપો, અને તે કેટલા અંશના છે તે કહો.

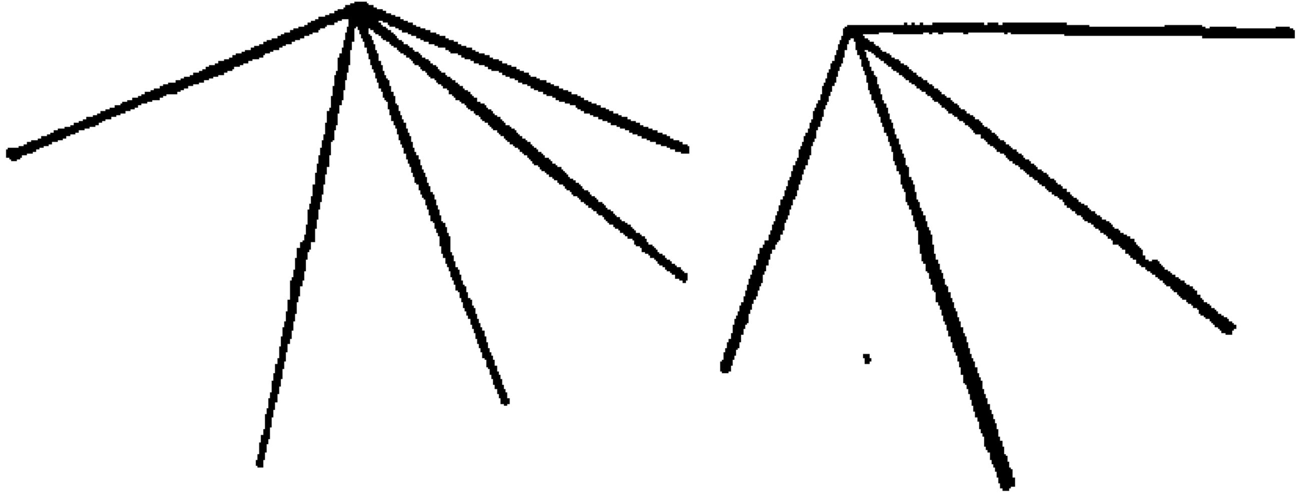


નીચે આપેલા પાસપાસેના ખુણામાંનો દરેક ખુણો માપો; અને તે બે ખુણાનો સરવાળો કરો. પછી આખો ખુણો માપો, અને તે પરથી પહેલાંના જવાબ ખરા છે કે કેમ તે જુઓ.



૪. ઉપર પ્રમાણેજ નીચે આપેલા ખુણાના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. (બે જવાબમાં એક અંશ સુધી તફાવત પડે તો તે દરગુજર કરવામાં હરકત નથી.)





૫. એક વર્તુળ દોરો, અને તેના પરિઘના તમારી તરફના ભાગ પર કેટલાંક, અને તમારાથી આઘેના ભાગ પર કેટલાંક એવી રીતે બધાં મળીને ગમે તે પાંચ બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો, અને તેથી થતા એક પછી એક પાંચ ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ ઉપરથી વર્તુળમાં કેટલા કાટખુણા હોવાનું જણાઈ આવે છે?

૬. એક વર્તુળ દોરો અને કંપાસ વડે તેના પરિઘના ચાર–પાંચ સરખા ભાગ પાડો. આ ભાગોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી* વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા માપો, અને તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું માલમ પડયું? "તે સરખા છે."

૭. ગમે તેવા ખુણા દોરો અને તેમના અંશ અટકળથી નક્કી કરો. પછી કોણમાપક વડે ખુણા પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર માપતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જારી રાખો. (અટકળથી માપવામાં ૫ અંશનો તફાવત પડે ત્યાંસુધી ચાલે.)

ખુણો દુભાગવાની રીત (કાગળની ગડી વાળીને):—આપેલા $\angle$ **અબક** જેવડો ખુણો દોરો, અને તેને કાપી કાઢો. **અબ, બક** પર

* છેદનબિંદુ—કોઈ પણ સીધી કે વાંકી લીટીને જે બિંદુમાં છેદવામાં આવે છે, તે બિંદુને છેદનબિંદુ કહે છે.

બરાબર પડે એવી રીતે કાગળ વાળો. વાળવાથી ખુણાના જે બે ભાગ થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

[આ પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં કૌંસ, પરિધિ, જ્યા, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, એ સંબંધી જે માહીતી પહેલાં આપેલી છે તેનું પુનરાવર્તન કરાવવું.]

બીજી રીત:—આપેલા **अबक** ખુણાનું **ब** મધ્યબિંદુ અને ગમે તે ત્રિજ્યા લઈને **अब, बक**ને અનુક્રમે **ड** તથા **ई**માં છેદે એવો કૌંસ દોરો. **ड, ई** મધ્યબિંદુ અને **डई** જેટલી ત્રિજ્યા લઈને **फ**માં એક બીજાને છેદે એવા કૌંસ દોરો. **फब** સાંધો. **फब** આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

૮. કેટલાક ખુણા લઈને તેમને ઉપર કહેલી રીતે દુભાગો, અને તેમના વિભાગ કોણમાપકથી માપીને તે બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

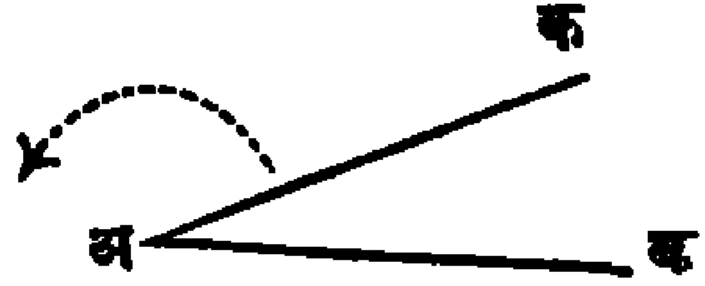
કૌંસ દુભાગવાની રીત:—**अब** આપેલો કૌંસ છે. **अब**નો છાપો લો. **अ, ब** પર પડે એવી રીતે ગડી વાળો. ગડીથી **अब**ના જે બે વિભાગ થાય છે, તે એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે; તે પરથી તે સરખા છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

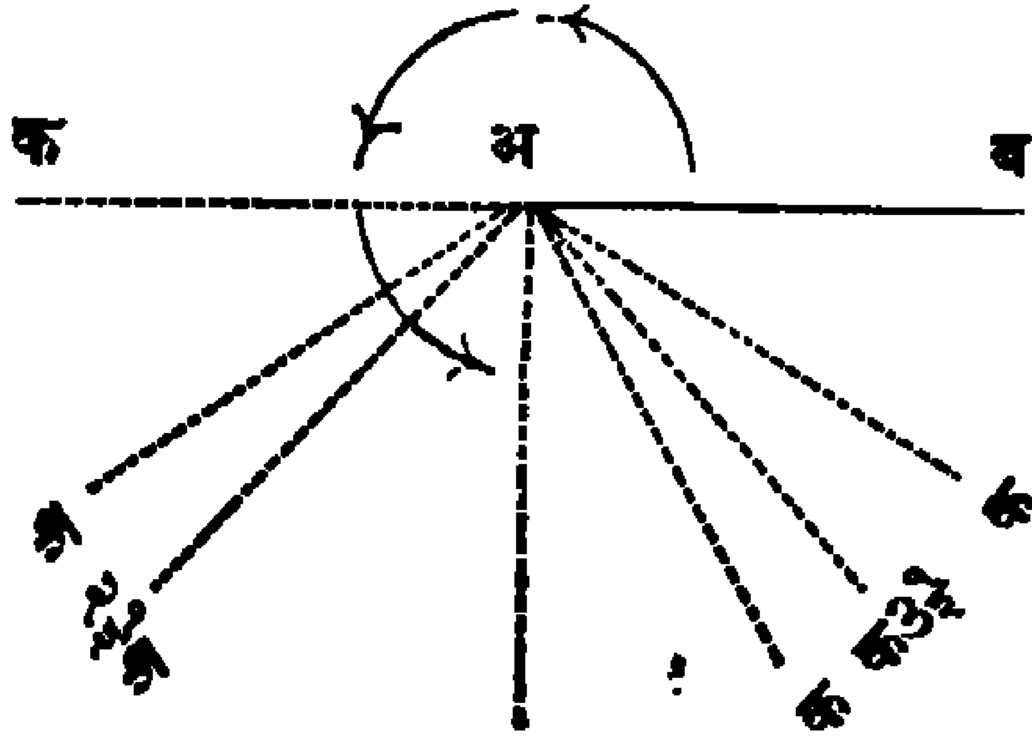
બીજી રીત:—એક **अब** કૌંસ લો. **अ** મધ્યબિંદુ અને **अब**ના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને એક કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને **ब** મધ્યબિંદુ લઈને ઉપરના કૌંસને **क** અને **ड**માં છેદે એવો બીજો કૌંસ દોરો. **कड** સાંધો. **अब** કૌંસને **कड** દુભાગે છે.

૯. એક વર્તુળ દોરો. તેમાં ગમે તે એક **अब** કૌંસ લો. **अब** કૌંસને **क** બિંદુમાં દુભાગો. વર્તુળના મધ્યબિંદુ **म**ને **अ,ब,क**ની સાથે સાંધો. **अमक** અને **बमक** ખુણા માપો અને તેમને સરખાવો. બીજા કૌંસ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ થતા ખુણા અને તે ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના કૌંસોની વચ્ચે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે?

બહિર્વક્રકોણ.

પાસેની આકૃતિમાંની **अब** સળી જ્યારે બાણની દિશામાં (ઘડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં) ફરતી ફરતી '૨'થી દર્શાવેલે સ્થળે આવે છે, ત્યારે તે **अब**ની



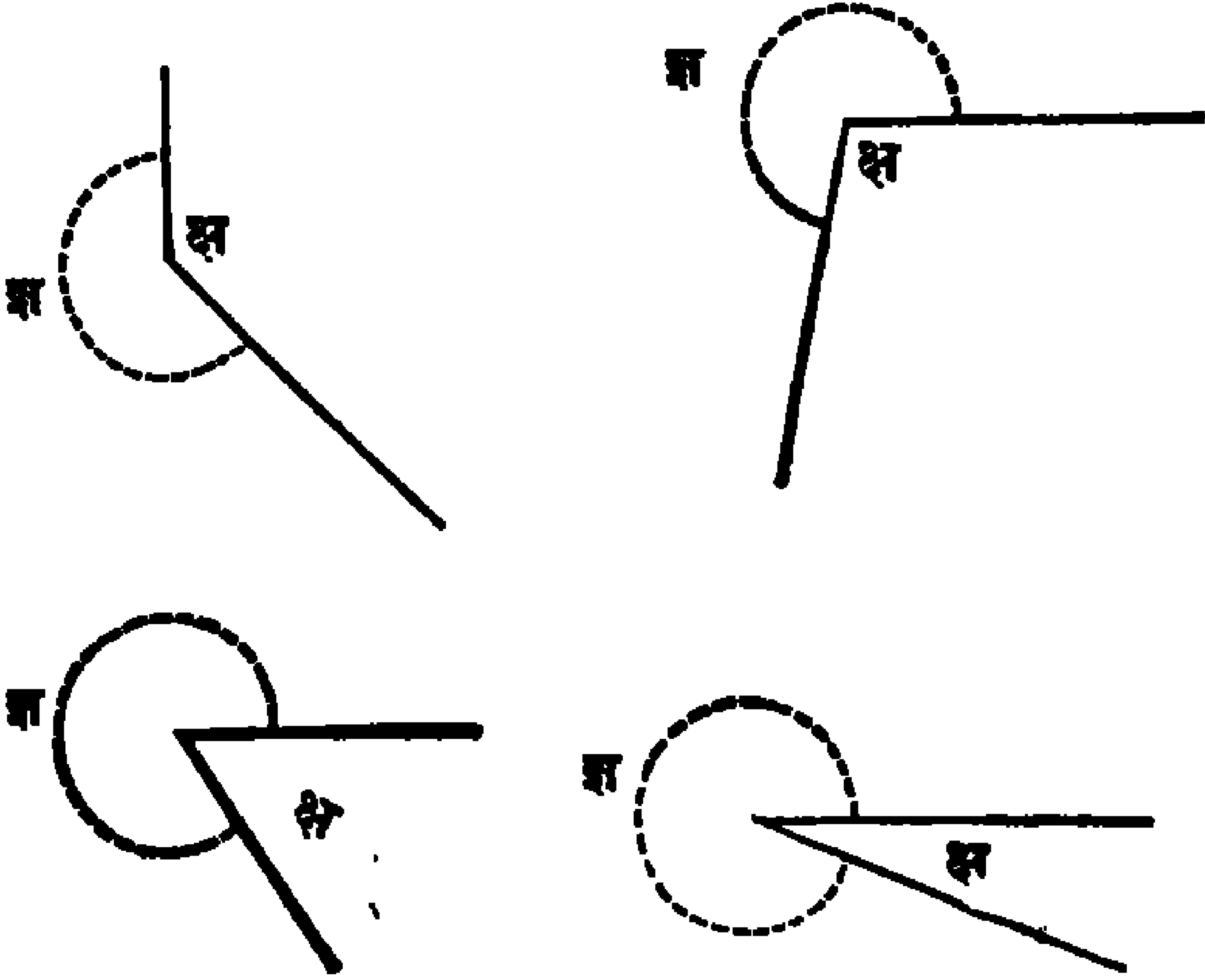


સાથે બે કાટખુણા કરે છે. હવે જો તેજ સળી, વળી આગળ ફરતી ફરતી '૩'થી દર્શાવેલે સ્થળે આવશે, તો તે **अब** સાથે જે ખુણો કરશે તે બે કાટખુણાથી મોટો થશે.

આ પ્રમાણે **अक** સળી '૨'થી દર્શાવેલા સ્થળ આગળથી શરૂ કરી બાણની દિશામાં ફરતાં ફરતાં પાછી **अब** ઉપર જઈ પડે ત્યાંસુધીમાં **अब** સાથે જે ખુણા કરશે, તે **બે કાટખુણાથી મોટા અને ચાર કાટખુણાથી નાના થશે. એવા ખુણાને બહિર્વક્ર ખુણો કે બહિર્વક્રકોણ** કહે છે.

ખુણાનો ફરતો ભુજ સ્થિર ભુજથી શરૂ થતા વર્તુળના અર્ધા ભાગ કરતાં વધારે ભાગમાં થઈને જવાથી જે ખુણો થાય છે, તેને બહિર્વક્રકોણ કહે છે, એમ કહીએ તોપણ ચાલે.

નીચેની આકૃતિઓમાં ટપકાંની લીટીઓથી દર્શાવેલા ખુણા બહિર્વક્રકોણ છે. આ ખુણા ઉલટી દિશામાંથી જોયા હોય તો બહિર્વક્ર દેખાતા નથી એ ઉઘાડું છે.



[ઉપલા ખુણામાંથી કોઈ પણ ખુણો ક્ષની બાજુથી જોયો હોય, તો તે બે કાટખુણા કરતાં નાનો દેખાય છે; પણ તે જ્ઞની બાજુથી જોયો હોય તો બે કાટખુણા કરતાં મોટો દેખાય છે. ક્ષની બાજુ પરનો ખુણો **અંતર્વક્ર ખુણો** કહેવાય છે. અર્થાત્, અંતર્વક્ર ખુણો એટલે બે કાટખુણાથી નાનો ખુણો.]

પ્રશ્ન.

૧. ઘડિઆળમાં નવ વાગે છે ત્યારે કલાકના અને મિનિટના કાંટા વચ્ચે કેટલા અંશનો બહિર્વક્રકોણ થાય છે?

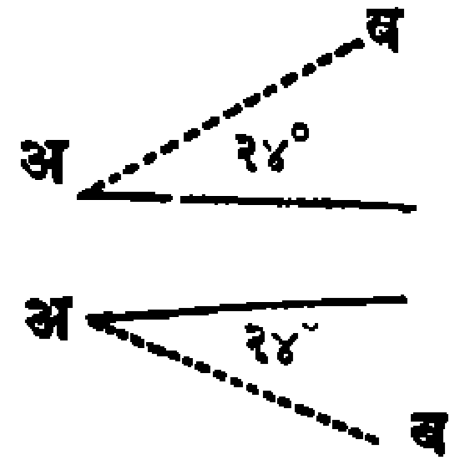
૨. બે કાંટાની વચ્ચેનો બહિર્વક્ર ખુણો અંતર્વક્ર ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો તે બહિર્વક્ર ખુણો કેટલો મોટો છે?

૩. ઉપલા પ્રશ્નમાં બહિર્વક્ર ખુણો અંતર્વક્ર ખુણાથી બમણો, ૪ગણો, ૫ગણો છે, એમ ધારીને જવાબ કાઢો.

સૂચના—બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપતી વખતે અંતર્વક્ર ખુણો લેવાનો રિવાજ છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.

સાપેક્ષ દિશા.

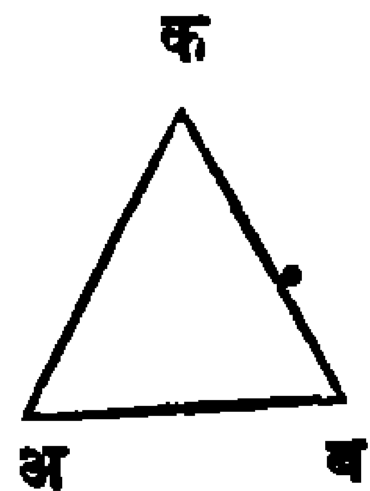
એક સ્થળ બીજા સ્થળની કઈ દિશામાં છે તે જોવાની રીતઃ—ધારો કે **ब** સ્થળ **अ** સ્થળની કઈ દિશામાં છે એ શોધી કાઢવુ છે. **ब** સ્થળ મુખ્ય ચાર દિશામાંથી લગભગ કઈ દિશાની પાસે છે એ પહેલાં જોવું. જો તે પૂર્વ તરફ છે એમ લાગે, તો **अ**માં થઈને જાય એવી એક સીધી લીટી બરાબર પૂર્વ તરફ દોરવી. પછી **ब**થી **अ** સુધી લીટી દોરવી, અને આ લીટીનો પૂર્વ તરફ દોરેલી લીટીની સાથે જે ખુણો થાય છે તે ખુણો માપવો. ધારો કે આ ખુણો ૨૪ અંશનો છે. હવે જો **अब** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીથી ઉત્તર તરફ હોય, તો



बની દિશા 'પૂર્વની ઉત્તરમાં ૨૪ અંશ છે, એમ કહેવું; અને **अब** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીની દક્ષિણમાં હોય, તો **ब**ની દિશા 'પૂર્વની દક્ષિણમાં ૨૪ અંશ છે' એમ કહેવું.

પ્રશ્ન.

૧. **अबक** અને **बअक** ખુણા દરેક ૬૦ અંશના છે. હવે જો **अब** લીટી પૂર્વપશ્ચિમ હોય, તો **क**, **अ**ની કઈ દિશામાં છે? **ब**ની કઈ દિશામાં છે?



૨. એક માણસ **अ** સ્થળથી નીકળી ચાર માઇલ બરાબર ઉત્તર તરફ જાય છે, અને ત્યાંથી ૪ માઇલ બરાબર પશ્ચિમ તરફ જઈને

ब સ્થળે પહોંચે છે; તો **ब**, **अ**ની કઈ દિશામાં છે? (એક માઇલ માટે અર્ધો ઇંચ એ સ્કેલ લઈને આકૃતિ દોરો.)

[કોઈ પણ સ્કેલ લઈને દોરેલી આકૃતિની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ કાઢો.]

૩. જેની લંબાઈ ૪૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૦ ફુટ છે, એવા **अबकड** લંબચોરસમાં **क**, **अ**ની કઈ દિશામાં છે? **अब** બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. (સ્કેલ–૧"=૨૦ ફુટ.)

૪. **ब**ની પશ્ચિમે **अ** ૨·૫ માઇલ છે અને **अ**ની દક્ષિણમાં **क** ૪·૫ માઇલ છે; તો **ब**થી **क** કેટલું આઘુ છે અને **ब**ની કઈ દિશામાં છે?

૫. એક માણસ **अ** સ્થળથી ૩ માઇલ બરાબર દક્ષિણ તરફ જાય છે. ત્યાંથી તે બરાબર ઇશાન તરફ ૮ માઇલ જઈને **ब** સ્થળે પહોંચે છે; તો **अ**થી **ब** કેટલુ આઘુ છે, અને **अ**ની કઈ દિશામાં છે?

૬. **अ**, **ब**ની વાયવ્યમાં ૧૭·૫ માઇલ છે; **ब**, **क**ની ઇશાનમાં ૨૩ માઇલ છે; તો **क**, **अ**થી કેટલું આઘુ છે, અને **अ**ની કઈ દિશામાં છે?

૭. **ब** અને **क** એ સ્થળો **अ**થી બરાબર ૫ માઇલ પર છે અને તે અનુક્રમે દક્ષિણની પશ્ચિમમાં ૩૬° અને પશ્ચિમની દક્ષિણમાં ૧૮° છે, તો **ब**, **क**ની કઈ દિશામાં છે, અને તે બેની વચ્ચેનુ અતર કેટલુ છે?

૮. **ब** અને **क** સ્થળોની વચ્ચે ૩·૫ માઇલનું અતર છે, અને **ब**, **अ**ની બરાબર ઉત્તરમાં છે. **क**, **ब**ની બરાબર પૂર્વમાં અને **अ**ની બરાબર ઇશાનમાં છે; તો **क**નું **अ**થી અતર કેટલું?

૯. **अ** અને **ब** બેટોની વચ્ચે ૮૦૦ ફુટનું અતર છે. **ब**, **अ**ની બરાબર ઉત્તરે છે. એક વહાણ **ब**થી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૫ મિનિટ સુધી ગયા પછી તેની દિશા **अ**ની ઉત્તરની પૂર્વમાં ૫૯ અંશ હોવાનું જણાઈ આવે છે; તો તે વહાણ ૫ મિનિટમાં કેટલુ અંતર ચાલ્યું, અને તેનો દર કલાકે વેગ કેટલો?

૧૦. એક વિભાજકની બાજુઓની લંબાઈ ૧૦ સે.મી. છે, અને તેમની વચ્ચે ૩૫°નો ખુણો થતા સુધી તે પહોળી કરેલી છે; તો વિભાજકની બાજુઓની અણીઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે ?

૧૧. એક સીધી વાડથી ૨૦ હાથને અંતરે દાટેલા ખુંટા સાથે એક બકરીને દોરીથી બાંધેલી છે; અને તે બકરી ખુંટાથી ૩૫ હાથ આઘી જઈ શકે એટલી તે દોરી લાંબી છે; તો તે બકરી તે વાડનો કેટલો ભાગ ખાઈ શકશે ?

અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે.

અમુક અંશનો ખુણો દોરવાની રીતઃ—એક સીધી લીટી દોરવી. તે લીટીના ડાબા છેડા પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ, અને તે લીટી પર કોણમાપકની જમણી બાજુ બરાબર પડે એવી રીતે કોણમાપક મૂકવો. પછી જેટલા અંશનો ખુણો કરવો હોય, તેટલા અંશ બતાવનારી કોણમાપક પરની લીટીના છેડા પાસે કાગળ પર પેન્સિલથી ઝીણું ટપકું કરવું, અને તે ટપકાથી પહેલી લીટીના ડાબા છેડા સુધી લીટી દોરવી.

(પેન્સિલને બદલે વિભાજકની અણીથી કે ટાંકણીથી આ બિંદુ લીધું હોય તો ખુણો વધારે બરાબર નીકળશે.)

નીચેના અંશના ખુણા કરોઃ—

(૧) ૩૦, ૬૦, ૪૫, ૧૩૫, ૭૫, ૧૦૦, ૧૨૦.

(૨) ૧૮, ૨૩, ૮૯, ૧૨૫, ૫૭, ૬૪, ૧૧૧, ૧૫૨, ૧૭૮.

૩૦ અંશનો **अबक** ખુણો કરો અને તેમાં ૨૫ અંશનો **कबड** ખુણો ઉમેરો. એવી રીતે બનેલો **अबड** ખુણો માપો, અને તેના અંશ બરાબર ૫૫ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો ભૂલ ક્યાં છે તે ખોળી કાઢો.

अबक અને **कबड** એ ખુણા અનુક્રમે નીચેના અંશના લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરોઃ—

૨૦, ૭૦; ૫૨, ૨૮; ૪૩, ૧૭; વગેરે.

अबक, कबड, डबई ખુણા અનુક્રમે ૧૭, ૨૩, ૩૮ અંશના લો. **अबई** ખુણો માપો, અને તેના અંશ ૭૮ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો પહેલાં માપતી વખતે ભૂલ ક્યાં થઈ તે શોધી કાઢો.

अबक, कबड, डबई, એ ખુણા નીચેના અંશના લઈને ઉપર મુજબ પ્રયોગ કરો:—

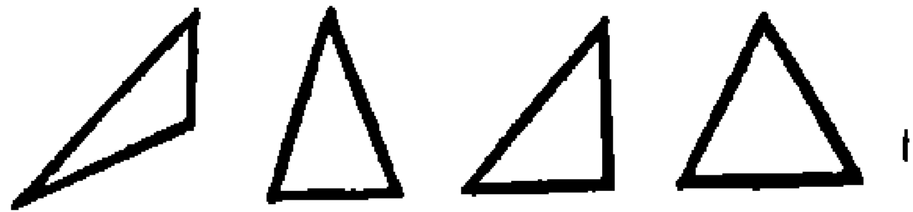
(૧) ૭૦, ૧૨, ૨૮; (૨) ૧૧૬,૨૦, ૩૪; (૩) ૫,૧૮,૧૦૦.

अबक ખુણો ૧૩૦°નો લઈને તેમાંથી ૪૦°, ૩૦°, ૨૫°ના ખુણા કાપી કાઢો. બાકી રહેલો ખુણો ૩૫°નો થાય છે કે નહિ તે જુઓ. ન થાય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

બીજા ખુણા લઈને ઉપલો પ્રયોગ ફરીથી કરો.

નીચેના અંશના ખુણા અટકળથી કાઢો, અને પછી તેમને પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર દોરતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જારી રાખો:—૪૫°, ૨૨·૫°, ૩૦°, ૨૦°, ૬૦°, ૧૦°, ૭૦°, ૮૦°, ૧૨૦°, ૧૩૫°.

પાસેની આકૃતિઓને ત્રિકોણ કહે છે. (ત્રિ=ત્રણ, કોણ=ખુણો. જેને ત્રણ ખુણા હોય એવી આકૃતિ). આ આકૃતિઓની માફક જે આકૃતિઓની હદ ત્રણ સીધી લીટીઓથી બંધાએલી હોય તે બધી આકૃતિઓને ત્રિકોણ* કહે છે.



નીચેનાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવોઃ—

अब=૧·૩″, ∠**अबक**=૩૦°, ∠**बअक**=૬૦°.

„ =૧″, „ ૫૦°, „ =૫૦°.

„ =૧·૮″, „ ૬૦°, „ =૩૦°.

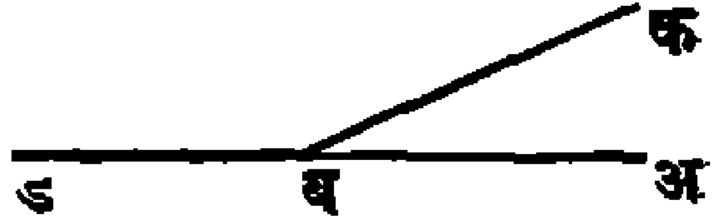
.........વગેરે.

---

* વ્યાખ્યા—ત્રણ બાજુ કે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાએલી હોય છે તે આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે.

એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા.

अबक ગમે તેટલા કદનો સાંકડો ખુણો લો. તેની **अब** બાજુ ड સુધી વધારો. **कबड** ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?



अबक કાટખુણો દોરો. તેની **अब** બાજુ **ड** સુધી લંબાવો. **कबड** ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

ગમે તેવડો એક **अबक** પહોળો ખુણો કાઢો. તેની **अब** બાજુ ड સુધી વધારો. **कबड** ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

अबक ½ કાટખુણા જેવડો કાઢો. **अब**ને **ड** સુધી વધારો. **कबड** ખુણો માપો અને તે કેટલા કાટખુણા બરાબર છે તે કહો.

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.)

अबड લીટી પર **बक** લીટી ઉભી છે:—

અને **अबक** ખુણો ૫૩ અંશનો છે; તો **कबड** કેવડો હશે ?

„	„	૭૮	„	„	„	„
„	„	૧૧૦	„	„	„	„
„	„	૧૩૭	„	„	„	„

ઉપલા પ્રશ્નો પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં **अबक** ખુણો કાટખુણાથી કેટલે અંશે ઓછો કે વત્તો છે તે જુઓ, અને તેવીજ રીતે **कबड** ખુણો કાટખુણાથી કેટલે અંશે વત્તો છે કે ઓછો છે તે જુઓ. આ ઉપરથી **अबक** અને **कबड** ખુણાઓની વચ્ચે શો સંબંધ જણાઈ આવે છે ?

"તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે."

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા પાસપાસેના ખુણાઓના સંબંધમાં કયો નિયમ નીકળે છે ?

"એક લીટી બીજી પર પડી હોય, તો બીજી લીટીની એક બાજુ પર જે પાસપાસેના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે."

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વગર નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર કહો.)

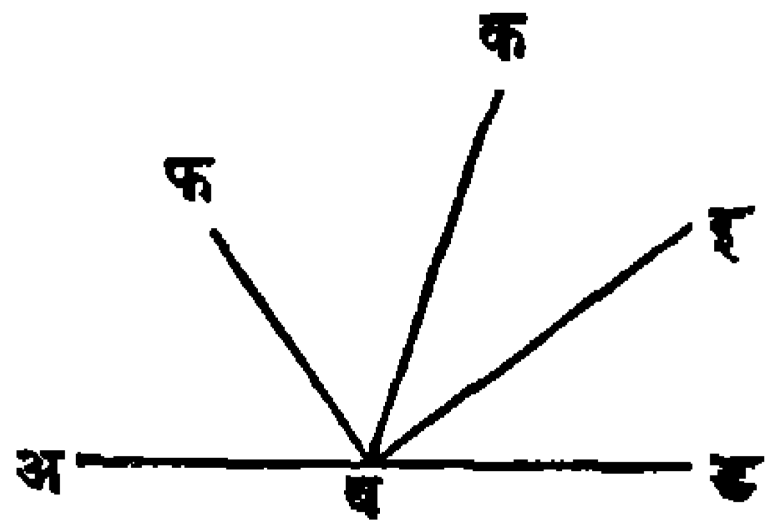
अबड એક સીધી લીટી છે. તેની સાથે—

बक લીટી ૬૫°નો ખુણો કરે છે, તો **कबड** ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

„ ૧૨૦° „ „ „

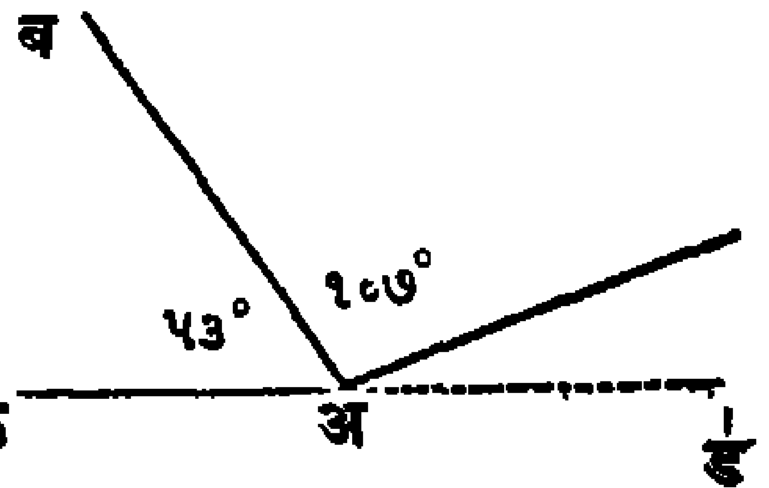
„ ૧૨૭° „ „ „

अबड લીટી લો. તેની સાથે ગમે તેવડો ખુણો કરે એવી **बक** લીટી દોરો. કાગળ વાળીને **अबक** ખુણાને દુભાગો. તેજ પ્રમાણે **कबड** ખુણાને દુભાગો. ખુણા દુભાગનારા સળ **बफ** અને **बई** લીટીઓ વડે દર્શાવો. **ईबफ** ખુણો માપો. તે કેવડો છે ?



આ ઉપરથી **अबक** અને **कबड** ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર જણાઈ આવે છે ? "બે કાટખુણા બરાબર."

अब લીટી લો, તેની એક બાજુએ **बअक** ૫૩ અંશનો ખુણો કરો. બીજી બાજુએ **बअड** ૧૦૭ અંશનો ખુણો કરો. **कअड** ખુણો કેટલા અંશનો થાય છે ? તે બે કાટખુણા કરતાં કેટલે અંશે ઓછો કે વધારે છે ? **कअड** સીધી લીટી છે કે ? **कअड** સીધી લીટી દોરો. તે સીધી લીટી થવા માટે **बअक** અને **बअड** એ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ ?



ઉપલા પ્રશ્નોમાં **बअक** અને **बअड** અનુક્રમે ૫૦ અને ૧૧૦, ૧૦૫ અને ૭૫, ૫૧ અને ૧૨૯, ૧૧૦ અને ૯૦, ૪૯ અને ૧૪૧, ૩૦ અને ૧૭૦ લો અને ઉપરના જેવાજ પ્રયોગ કરી જુઓ.

આ ઉપરથી **कअड** લીટી સીધી હોવા માટે **बअक** અને **बअड** ખુણા વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ (એટલે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ) એ વિષે કયો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે? " તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ."

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૬૧° અને ૧૦૩° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે ?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૧૧૮° અને ૭૨° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે ?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૧૦૯° અને ૮૧° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે ?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૭૧° અને ૧૧૦° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે ?

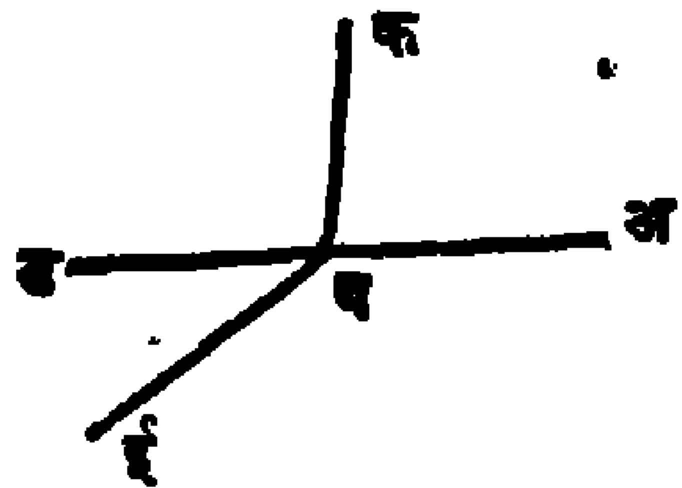
अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૫૦° અને ૧૩૦° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે ?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૧૩૫° અને ૫૨° હોય તો **कबड** સીધી લીટી થશે કે ?

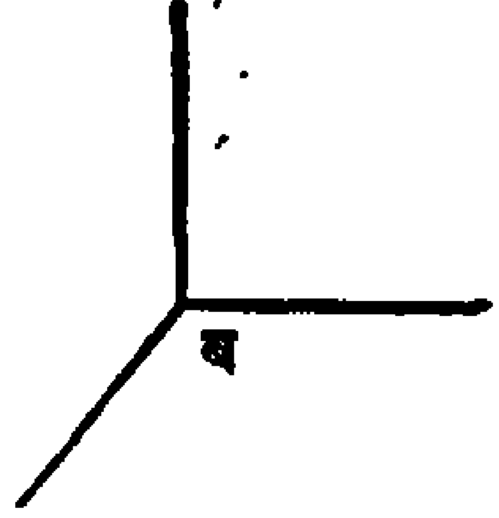
ઉપલા પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

"જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોય, તો તેમના બહારના ભુજો એક સીધી લીટીમાં હોય છે."

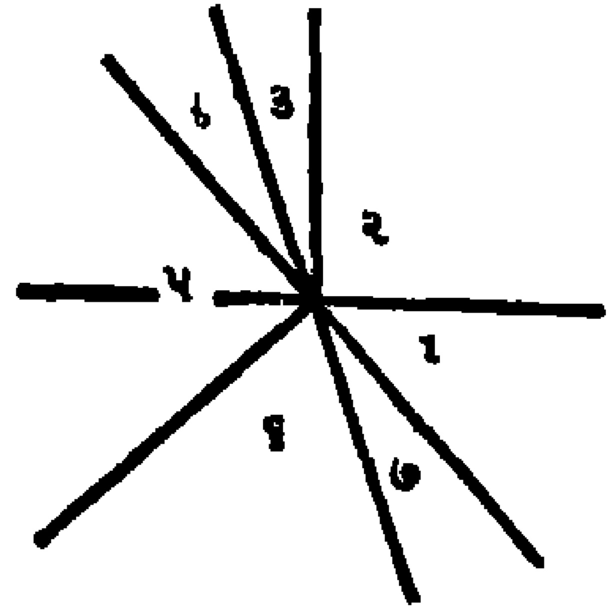
પાસેની આકૃતિમાં **अबक** અને **कबड** ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે? આ ઉપરથી **अबक, कबड, डबई,** અને **ईबअ** ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે એ તમે કહી શકશો ?



ब બિંદુમાંથી ત્રણ લીટીઓ જુદી જુદી દિશામાં દોરો. તેથી બનતા ત્રણે ખુણા માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?



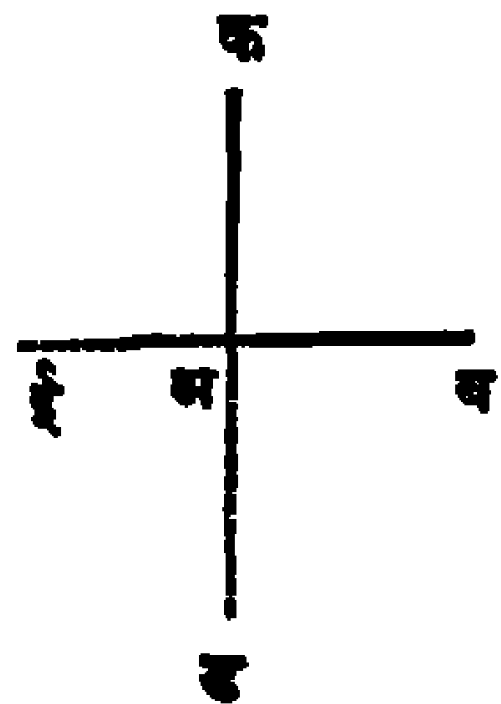
પાસેની આકૃતિમાં સાત ખુણા એક બીજાની જોડે આવેલા દર્શાવ્યા છે. એમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે, એ ખુણા પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો.



ઉપલી આકૃતિમાંના ૭ ખુણાનો સરવાળો $૩\frac{૧}{૨}$ કાટખુણા હોય, તો બાકી રહેલો ખુણો કેટલો મોટો હોવો જોઈએ ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં ૭ ખુણાનો સરવાળો $૨\frac{૭}{૮}$, $૩\frac{૧}{૩}$, $૨\frac{૭}{૨}$ કાટખુણા ધારીને ઉત્તર કાઢો.

बअक કાટખુણો છે. **बअ**ને **ई** સુધી વધારેલી છે, અને **कअ**ને **ड** સુધી વધારેલી છે; તો **कअई**, **ईअड**, **डअब**, એ પૈકી દરેક ખુણો કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

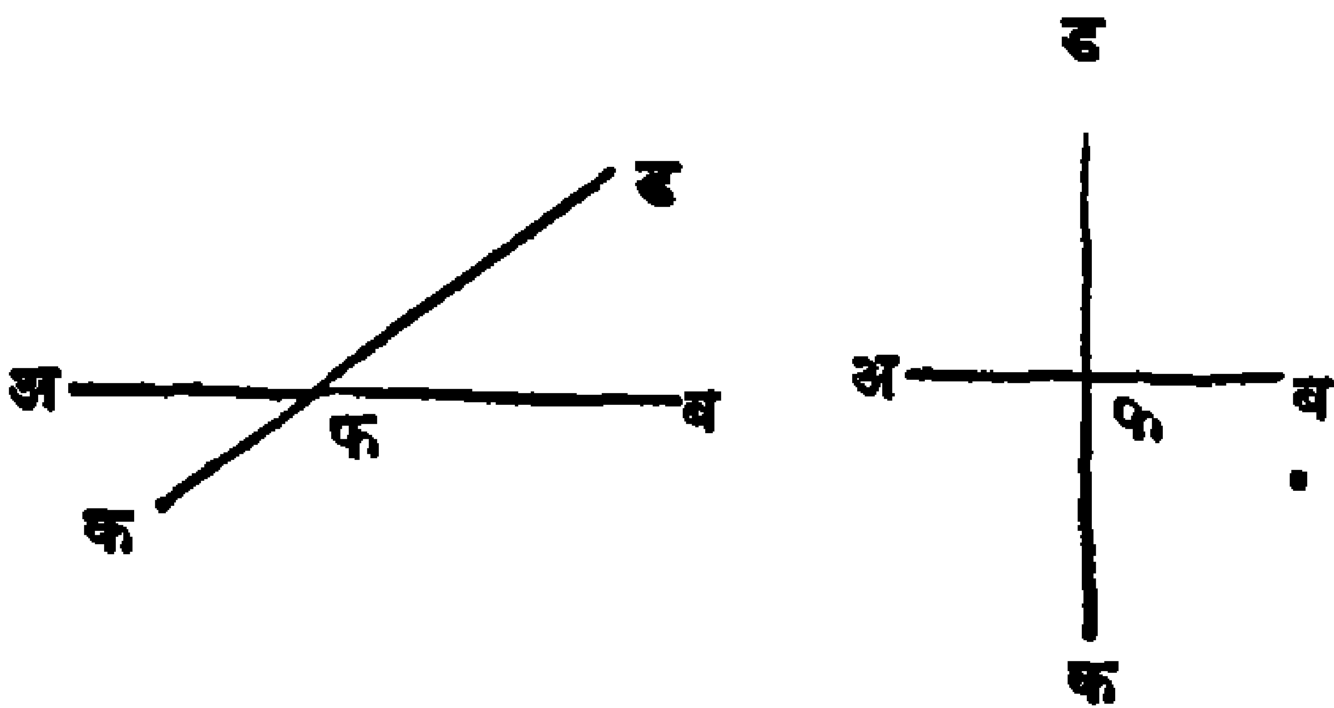


એક **अबक** લીટી લો. તે **ब**માં ગમે તે **बड** લીટી દોરો. કાગળની ગડી વાળીને **अबड** ખુણાને દુભાગો, અને તેજ રીતે **कबड** ખુણાને દુભાગો. કાગળ પરના બે સળની વચ્ચેનો ખુણો કેટલો મોટો છે તે ખુણાને પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો. ઉત્તરનું કારણ આપો.

એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા.

ગમે તેટલી લાંબી બે કામડી કે સળી લો, અને તે એકજ દિશામાં પડે એવી રીતે તેમને એક ઉપર એક મૂકીને વચ્ચે કોઈ પણ ઠેકાણે ટાંકણી ખોસો. ટાંકણી સહિત કામડીઓ ઉંચકીને ટાંકણી એક ઘડિઆળની (કાગળની) તાસકના* મધ્યબિંદુમાં ખોસો. પછી બે કામડી પૈકી એકનો એક છેડો પકડીને તેને ગમે તે દિશામાં ફેરવો. તે છેડાની વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગ જેટલી પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજા છેડાની પણ $\frac{1}{2}$ જેટલીજ પ્રદક્ષિણા થાય છે. પહેલા છેડાની $\frac{1}{4}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજાની પણ $\frac{1}{4}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, તેમજ પહેલાની $\frac{1}{3}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે એટલે બીજાની પણ તેટલીજ થાય છે, એ ધારીને જોવા છોકરાઓને કહેવું. કામડીના જુદા જુદા ભાગોમાં ટાંકણી ખોસીને ઉપલો પ્રયોગ કરો. કામડીના બંને છેડાની પ્રદક્ષિણા સરખી થવી, એ કામડીના જે બે ભાગો ટાંકણીની આસપાસ ફરે છે, તેમની લંબાઇના ઓછાવત્તાપણા પર અથવા સરખાપણા પર આધાર રાખે છે કે ? "ના."

ઉપલા પ્રયોગમાંથી નીકળતા નિયમની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :—



*ઘડિઆળની તાસકને બદલે પહેલાં ૨૧મા પાના પર કહેલી આકૃતિ લીધી હોય તોપણ ચાલે.

अब અને **कड** કામડીઓને એક બીજી પર રાખીને **फ** સ્થળે ટાંકણીથી જડી દીધી છે. હવે **कड** કામડીનો **ड** છેડો જો વર્તુળના $\frac{1}{8}$ ભાગમાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **क** છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરશે ?

ઉપલા પ્રયોગમાં **ड** છેડો એક કાટખુણામાં (વર્તુળના $\frac{1}{4}$ ભાગમાં થઈને જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **क** છેડો કેટલા મોટા ખુણામાં થઈને ફરશે ?

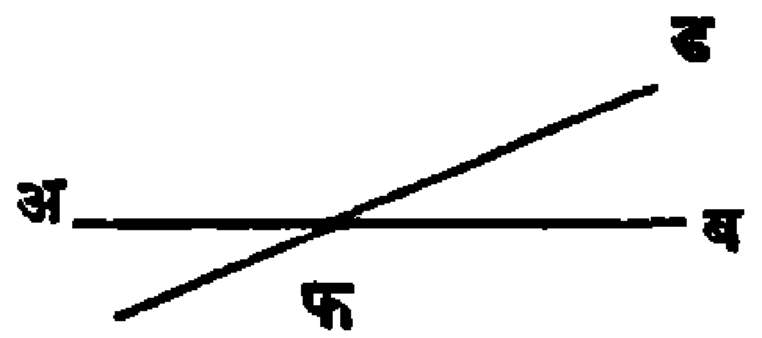
ઉપલા પ્રયોગો પરથી, પોતાનામાંના કોઈ પણ બિંદુની આસપાસ ફરતી લાકડીના કે લીટીના બે છેડા જે ખુણાઓમાં થઈને ફરે છે, તે ખુણાઓનો એક બીજા સાથે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

"જ્યારે કોઈ લીટી પોતાનામાંના કોઈ બિંદુની આસપાસ ફરે છે, ત્યારે તેના બે છેડાનાં અંતરો તે બિંદુથી ગમે તેટલાં ઓછાં વત્તાં હોય, તોપણ તે છેડા સરખાજ ખુણામાં થઈને ફરે છે."



अब લીટી **क** બિંદુની આસપાસ ફરે છે. જો તેનો **कब** ભાગ ૩૬°ના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **कअ** ભાગ કેટલા અંશના ખુણામાં થઈને ફરશે ?

अब લીટી પર **कड** લીટી (બંનેની લંબાઈ એકજ દિશામાં હોય એવી રીતે) પડેલી છે. **कड** લીટી **फ** બિંદુની આસપાસ ફરીને **अब** સાથે **बफड** ખુણો ૨૦ અંશનો કરે, તો **अफक** ખુણો કેટલા અંશનો થાય ?



ઉપલા પ્રયોગમાં **ड** છેડો ૪૫, ૬૦, ૭૫, ૧૧૫ અંશના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **क** છેડો કેવડા ખુણામાં થઈને ફરશે ?

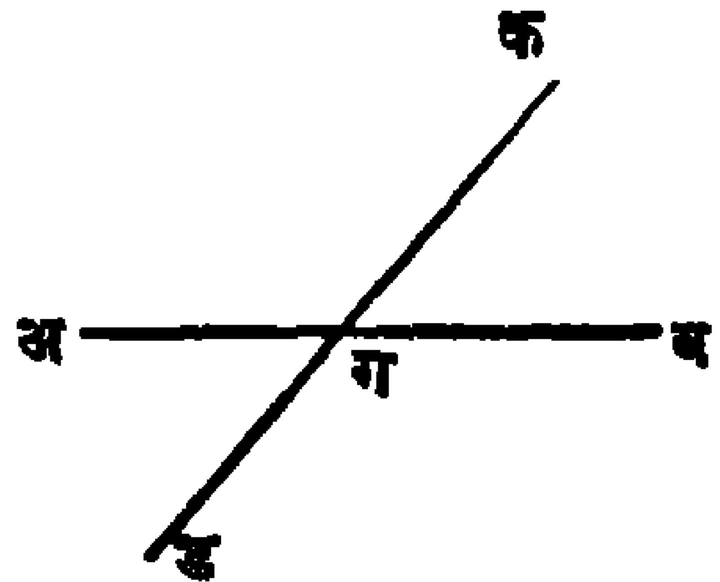
ઉપલા પ્રયોગમાં **अफड** ખુણો કેટલો મોટો થશે? **कफब** ખુણો કેવડો? **बफड** ખુણો ૩૮ અંશનો છે એમ ધારીને બાકીના ત્રણ ખુણા કેવડા છે તે શોધી કાઢો.

बफड ખુણો ૧૫૦, ૯૪, ૮૫, ૧૧૩ અંશનો ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

ઉપલા પ્રશ્નમાં **अफड**, અને **कफब**, તથા **बफड** અને **कफअ**, એ ખુણાઓને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે?

એક **अफब** લીટી દોરો. તેને છેદનારી ગમે તે **कफड** લીટી દોરો. **बफड** ખુણો કાપી કાઢો, અને તે **कफअ** પર મૂકો. તેમજ **अफड** ખુણો કાપી કાઢી તેને **कफब** પર મૂકો. તમને શું જણાય છે?

એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓથી બનેલા ખુણાઓ વિષે ઉપલા પ્રયોગમાંથી કયો નિયમ નીકળે છે? **"બે લીટી એક બીજીને છેદે છે ત્યારે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે."**



પાસેની આકૃતિમાં **बगड** ખુણો ૧૩૦° છે; તો **अगड** ખુણો **बगक** ખુણા બરાબર છે, એમ બાકીના ખુણા પ્રત્યક્ષ માપ્યા સિવાય સિદ્ધ કરો.

સમાંતર લીટીઓ.

કેટલીક સમાંતર લીટીઓની અને કેટલીક અસમાંતર લીટીઓની જોડો પાટીઆ પર કાઢવી. તેમની (દરેક જોડની) એક બાજુના છેડાઓની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે, અને તે આગળ (બીજા છેડા તરફ) ઓછું થતું જાય છે કે વત્તું થતું જાય છે, તે જોવા છોકરાઓને કહેવું. "કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે," "કેટલીકની વચ્ચેનું

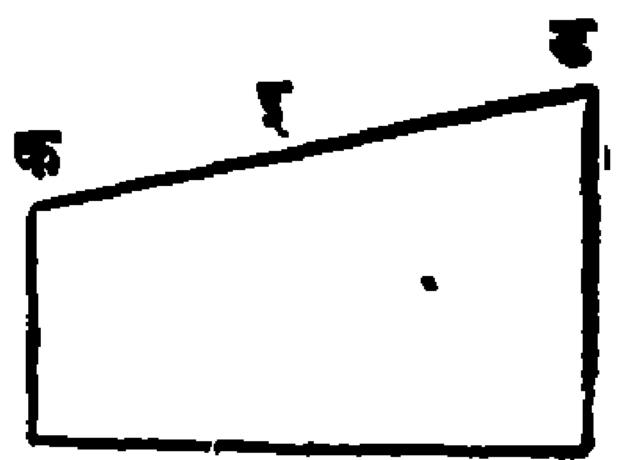
અંતર ઓછું થતું જાય છે," અને "કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર પ્રથમ હતું તેટલુંજ રહે છે," એમ છોકરાઓ કહેશે. જેમની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે, તે, જે બાજુએ અંતર ઓછું છે તે બાજુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? "હા." સામી બાજુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? "ના." જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે, તે જે દિશામાં અંતર વધતું જાય છે તે દિશામાં વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? "ના." સામી દિશામાં વધારી હોય તો છેડા મળશે કે? "હા." જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર કાયમ રહે છે, તે જમણી બાજુએ વધારી હોય તો એક બીજીને મળશે કે? "ના." ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો? "ના." આ લીટીઓ પહેલાં કહેલી બે પ્રકારની લીટીઓથી જુદા પ્રકારની છે. એવી લીટીઓને **સમાંતર લીટીઓ** કહે છે.

સમાંતર (સમ+અંતર)=જેમની વચ્ચેનું અતર બધે સરખુ હોય છે તે.

જેમની બે બાજુઓ સમાંતર હોય એવી કેટલીક વસ્તુઓનાં નામ આપો.

સમાંતર લીટીઓ વિષેની કલ્પનાનું વધારે સ્પષ્ટીકરણ.

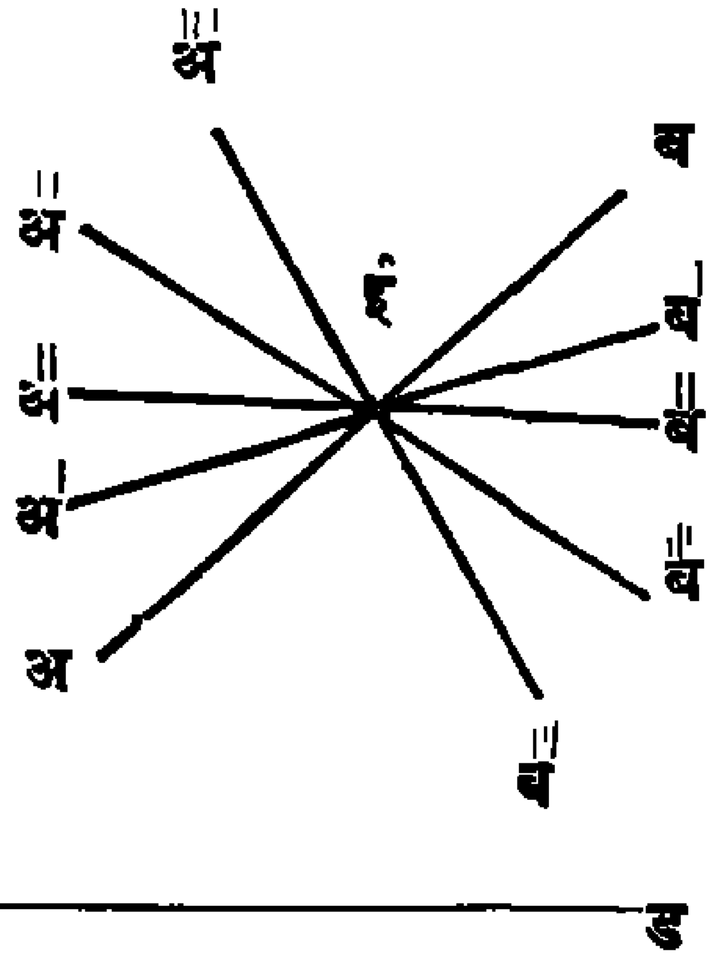
એક સીધી **अब** સળી પાટીઆ પર આડી મૂકી છે. તેથી કેટલેક અંતરે બીજી એક સીધી **कड** સળી **ई** સ્થળે ખોસેલી ટાંકણીથી પાટીઆ સાથે જડી દીધી છે. આ સળીને પહેલાં ગમે તે સ્થિતિમાં હોવા દો. આ સ્થિતિમાં **क** ને **ड** છેડાનું **अब**ના છેડાઓથી અંતર૦ માપો. **कड**નો જે છેડો **अब**થી



વધારે આઘો હોય, તે છેડાને **अब**ની પાસે લઈ જાઓ, અને તે છેડે **अब**ની પાસે લઈ જતી વખતે, બીજા છેડાનું **अब**થી જે અંતર હોય તેમાં શો ફેરફાર થાય છે, તે જુઓ. "પહેલાં જે છેડો આઘો હતો તેનું અંતર જેમ જેમ ઓછું કરવામાં આવે છે, તેમ તેમ

બીજા છેડાનું અંતર વધતું જાય છે." એ પ્રમાણે ફેરફાર થતાં થતાં કોઈ પણ વખતે **अब**થી **क** અને **ड** છેડાનું અંતર સરખું થાય છે કે ? "થાય છે." એવી સ્થિતિમાં એ લીટીઓ હોય ત્યારે તેમની વચ્ચે બધે ઠેકાણે સરખું અંતર હોય છે માટે એવી સ્થિતિમાં તેમને સમાંતર કહે છે.

પાસેની આકૃતિમાં **अब** લીટી ફરે છે ત્યારે તે જુદી જુદી સ્થિતિમાં આવે છે, તે સ્થિતિ **अ'ब'**, **अ''ब''**, **अ'''ब'''**, એ લીટીઓ દર્શાવે છે. **अब**, લીટી એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે એક અમર્યાદ **कड** લીટીને છેદે. **अ'ब'** એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે **कड**-

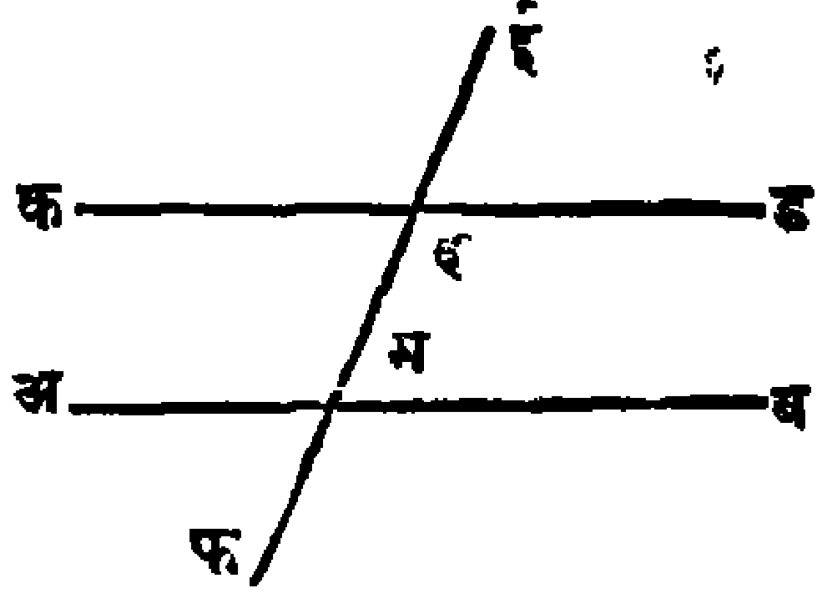


ને છેદે...**अ''ब''** લીટી એવી છે કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે **कड**ને છેદે નહિ, પરંતુ તેને જમણી બાજુએ વધારી હોય, તો **कड**ને છેદે. **अ'''ब'''** લીટી એવી છે કે તે...વગેરે.

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાય છે, કે **अब** લીટી **इ**ની આસપાસ ફરવામાં અમુક હદમાં હોય ત્યાંસુધીજ, ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો **कड**ને છેદે છે. તે હદની બહાર જાય ત્યારે, તે લીટીને જમણી તરફ વધારી હોય તો **कड**ને છેદે છે. આ બે હદની વચ્ચેં એવી એક સ્થિતિ હોવી જોઈએ, કે તે સ્થિતિમાં તે લીટીને ગમે તે દિશામાં વધારી હોય તોપણ તે **कड**ને મળે નહિ. એવી સ્થિતિમાં બે લીટી હોય તો તેમને **સમાંતર લીટીઓ** કહે છે.

કેટલાક ખુણાનાં નામ.

अब, कड લીટીઓને **ईफ** લીટી **म** અને **ह** બિંદુમાં છેદે છે. **ईफ** લીટી વડે **अब, कड** લીટીઓની સાથે જે ખુણા થાય છે, તેમને નીચે પ્રમાણે નામ આપ્યાં છેઃ—



∠**कहम** અને ∠**हमब**ને **વ્યુત્ક્રમ** (વિરુદ્ધ બાજુએ હોય એવા) **ખુણા** કહે છે.

∠**डहम** અને ∠**हमअ**ને વ્યુત્ક્રમ ખુણા કહે છે.

∠**ईहक**, ∠**ईहड**, ∠**फमअ**, અને ∠**फमब**ને **બહારના ખુણા** કહે છે (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની બહારની બાજુના ખુણા છે.)

∠**ईहड**, ∠**हमब**ને **સંગત ખુણા** કહે છે.

∠**ईहक**, ∠**हमअ**ને ,, ,, ,,

∠**कहम**, ∠**हमअ**, ∠**डहम**, ∠**हमब**ને **અંદરના ખુણા** કહે છે; કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની અંદરની બાજુના ખુણા છે. એમાંથી ∠**कहम** અને ∠**हमअ** એ **ईफ**ની એકજ બાજુએ છે, તેથી તેમને **એકજ બાજુ તરફના અંદરના ખુણા** કહે છે. તેમજ ∠**डहम** અને ∠**हमब** એ **ईफ**ની એકજ બાજુએ છે; તેથી તેમને પણ એક બાજુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે.

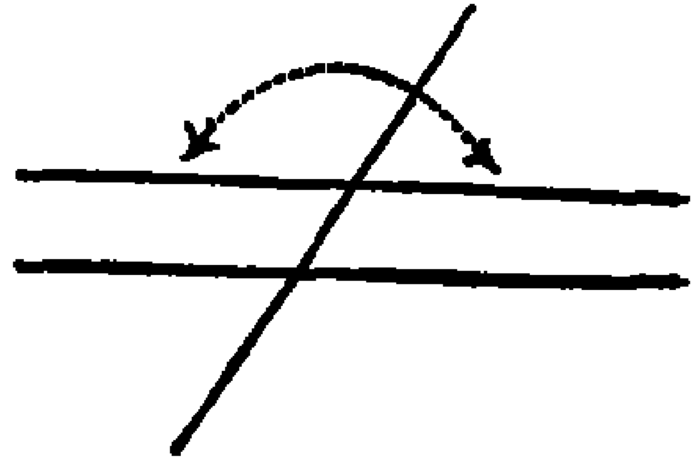
તમારી એક્સર્સાઇઝ બુકમાં દોરેલી સમાંતર લીટીઓની જુદી જુદી ચાર જોડો લો. તેમને છેદનારી ગમે તે લીટીઓ દોરો. છેદનારી લીટીઓને લીધે થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો. તેમને એક બીજા સાથે (વ્યુત્ક્રમ ખુણાની જોડમાંના એક ખુણાને બીજા સાથે) સરખાવો. તમને શું જણાય છે ?

વ્યુત્ક્રમ ખુણાઓમાંથી એક ખુણો કાપી કાઢીને બીજા ખુણા પર મૂકો. શું દેખાય છે? "તે સરખા છે."

સમાંતર ન હોય એવી બે લીટી લો. તેમને છેદે એવી એક લીટી દોરો. આ લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. તે સરખા છે કે? "ના."

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા અને અસમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણાની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે?

તમારી એક્સર્સાઇઝ બુકમાં દોરેલી ગમે તે બે સમાંતર લીટીઓ લો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. આ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો આ છેદનારી લીટીની એક બાજુનો (ડાબી કે જમણી બાજુનો) કાગળનો ભાગ કાતરથી કાપી કાઢો. આ ભાગ અર્ધો વર્તુલ જેટલો ફેરવીને (આકૃતિ જુઓ) બીજી બાજુના ભાગ પર એવી રીતે મૂકો કે તે વ્યુત્ક્રમ ખુણા એક બીજા પર પડે. આ ઉપરથી વ્યુત્ક્રમ ખુણા વિષે તમે શું શીખ્યા?



સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુ પર જે બહારનો ખુણો થાય છે, તેને સામેના (સંગત) ખુણા સાથે સરખાવો. અસમાંતર લીટીઓ લઈને એજ પ્રયોગ કરો. શો તફાવત જણાઈ આવે છે? "સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુના સંગત ખુણા બરાબર હોય છે. અસમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુ પરના સંગત ખુણાની બરાબર હોતો નથી."

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે તે લીટીની એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? બીજી બાજુના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કરો. તે કેટલો થાય છે? "બે કાટખુણા."

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી બાજુ તરફ ઓછું થતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી બાજુએ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ સરવાળો કેટલો થાય છે? બે કાટખુણાથી ઓછો કે વત્તો? "ઓછો."

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી તરફ વધતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી તરફ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય છે કે વધારે? "વધારે."

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં ઉપર જે પ્રયોગો કર્યા છે, તે પરથી તેમના કયા ધર્મો જણાઈ આવે છે?

"જો એક લીટી બે સમાંતર લીટીઓને છેદે, તો–

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા હોય છે;

(૩) છેદક લીટીની એક બાજુ પરના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે."

આ ધર્મો સમાંતર લીટીઓ સિવાય બીજી લીટીઓમાં દેખાઈ આવતા નથી.

સૂચના:—નીચેની વ્યાખ્યા અને આ પ્રકરણમાં આવેલી બીજી વ્યાખ્યાઓ આ પ્રકરણ ચાલતું હોય ત્યારે વિદ્યાર્થીઓને સમજાવવી, અને આ પ્રકરણ પુરૂં થયા પછીજ તેમની પાસે મોઢે કરાવવી.

સમાંતર લીટીઓની વ્યાખ્યા:—જે લીટીઓ (એકજ સપાટીમાં* હોઈ એવી હોય છે, કે તે) કોઈ પણ બાજુએ ગમે તેટલી વધારી હોય તે છતાં પણ એક બીજીને મળતી નથી, તે **સમાંતર લીટીઓ** કહેવાય છે.

'એકજ સપાટીમાં હોઈ' આ શબ્દો શા માટે વાપર્યા છે? એક પેન્સિલ પૂર્વપશ્ચિમ પકડી રાખી હોય, અને તે પર થોડે અંતરે

* 'સપાટી'શબ્દનો અર્થ આગળ બીજા પ્રકરણમાં આવશે.

બીજી પેન્સિલ પહેલીને અસમાંતર છતાં દક્ષિણઉત્તર પકડી રાખી હોય, તો તે પેન્સિલોથી દર્શાવાતી લીટીઓ ગમે તેટલી વધારી હોય તોપણ એક બીજીને બીલકુલ મળશે નહિ. પણ તે સમાંતર છે કે? "ના." આ ઉપરથી 'એકજ સપાટીમાં' એ શબ્દોની જરૂર સમજાય છે કે?

એ સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તે પૈકી એક ખુણો જો ૧૦૦°નો હોય તો બીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જો ૮૦°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જો ૭૫°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જો ૧૪૦°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય?

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવા વિષે.

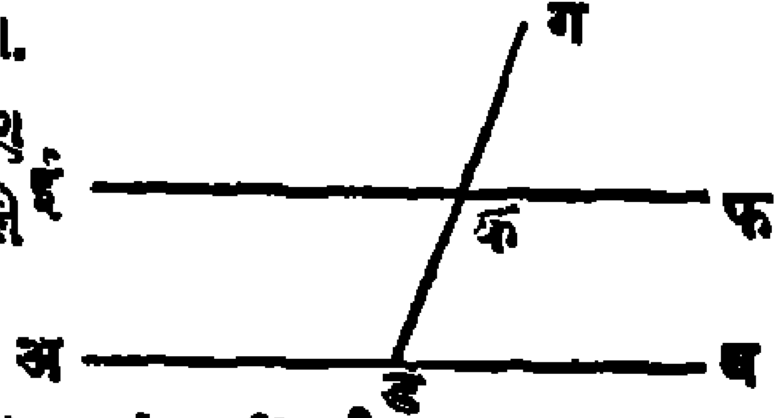
સમાંતર લીટીઓના ધર્મો વિષે જે કહેવામાં આવ્યું છે, તે ઉપરથી સમાંતર લીટીઓ દોરવાની કોઈ રીત તમને જણાઈ આવે છે કે? ધારો કે **अब** લીટીને સમાંતર લીટી **क** બિંદુમાંથી દોરવી છે; તો તે કેમ દોરશો?

कમાંથી **अब** લીટીને ગમે તે એક **ड** બિંદુમાં મળનારી એક **कड** લીટી દોરો. **कडब** ખુણો માપો. કોઈ એક લીટી **क** પાસે કેવડો ખુણો કરે તો તે લીટી **अब**ને સમાંતર થાય? "∠**कडब** જેટલો." **कड**ની કઈ બાજુએ? "∠**कडब**થી વિરુદ્ધ બાજુએ."

ઉપલા પ્રશ્નમાં **क**માં થઈને જનારી સમાંતર લીટી કાઢીએ, તો **क**ની જમણી તરફ અંદરની બાજુએ જે ખુણો થાય તે કેવડો

હોય? તે ખુણો દોરીને સમાંતર લીટી દોરી શકાય? अब લીટી અને क બિંદુ લઈને ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે कમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી દોરો.

એક अब લીટી લો. તેની ઉપલી બાજુએ એક क બિંદુ લો. अबમાં ગમે તે ड બિંદુ લો. कड સાંધો. પછી નીચેના ત્રણ પ્રયોગ જુદી જુદી આકૃતિ દોરીને કરો:—



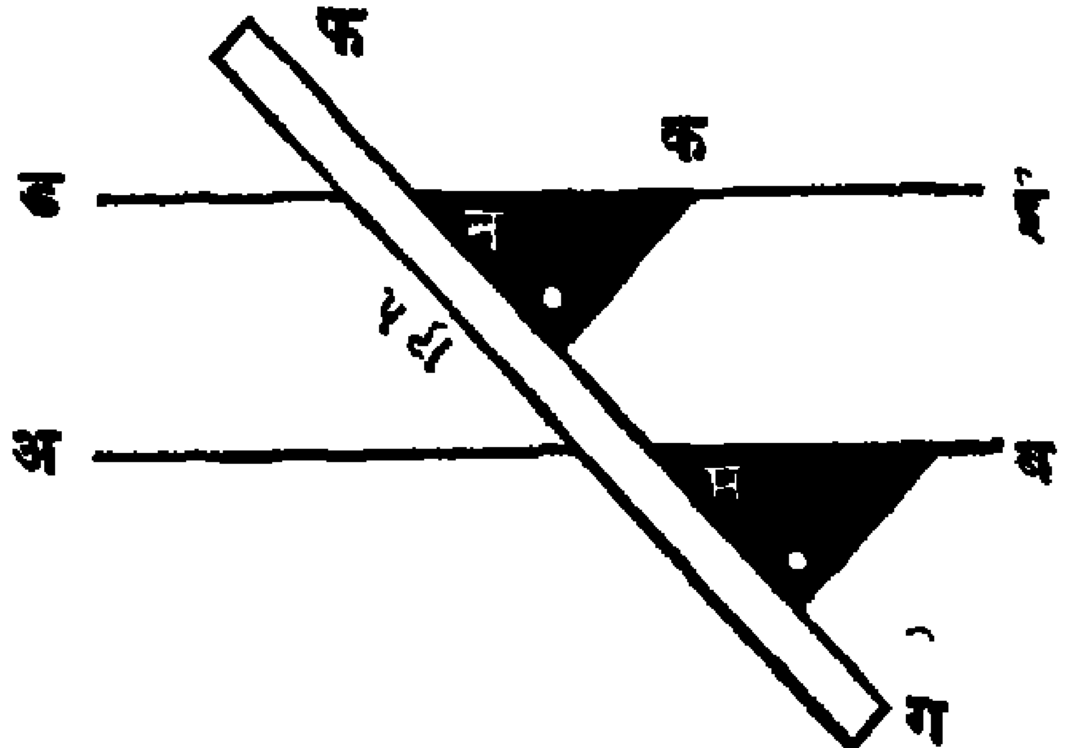
(૧) ∠कडब જેવડો ∠डकई લઈને ईकफ લીટી દોરો.

(૨) ∠कडबના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા જેવડો ∠डकफ દોરો, અને फकને ई સુધી વધારો.

(૩) डकને क તરફ ग સુધી વધારો. ∠कडब બરાબર ∠गकफ કરો, અને फकને ई સુધી વધારો.

(૨) અને (૩) એ આકૃતિઓમાં વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર છે, અને ईफ, अबને સમાંતર છે, એ બતાવી આપો.

બીજી રીત:—अब લીટી પર ત્રિકોણમાપનો કર્ણ બરાબર પડે એવી રીતે તે ત્રિકોણમાપ મૂકવું. ત્રિકોણમાપની બીજી બાજુને (એટલે કાટખુણો કરનારી એ બાજુમાંથી એક બાજુને) આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પટી લગાડવી. પછી પટીને દાબી રાખીને પટીની કોરે કોરે ત્રિકોણમાપને ઉપલી બાજુએ ખસેડવું. क બિંદુ પર ત્રિકોણમાપનો



કર્ણુ આવ્યો, કે કર્ણુની કોરે કોરે क બિંદુમાં થઈને જાય એવી લીટી દોરવી.

ધારો કે એવી રીતે **डई** લીટી **क** બિંદુમાં થઈને જાય એમ **अब**ને સમાંતર દોરેલી છે, તો તે સમાંતર છે એ વાત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. **अब, डकई**, એ લીટીઓને છેદનારી **फग** લીટીથી થનારા **न** અને **म** સંગત ખુણા સરખા છે; **डकई** લીટી **अब**ને સમાંતર છે.

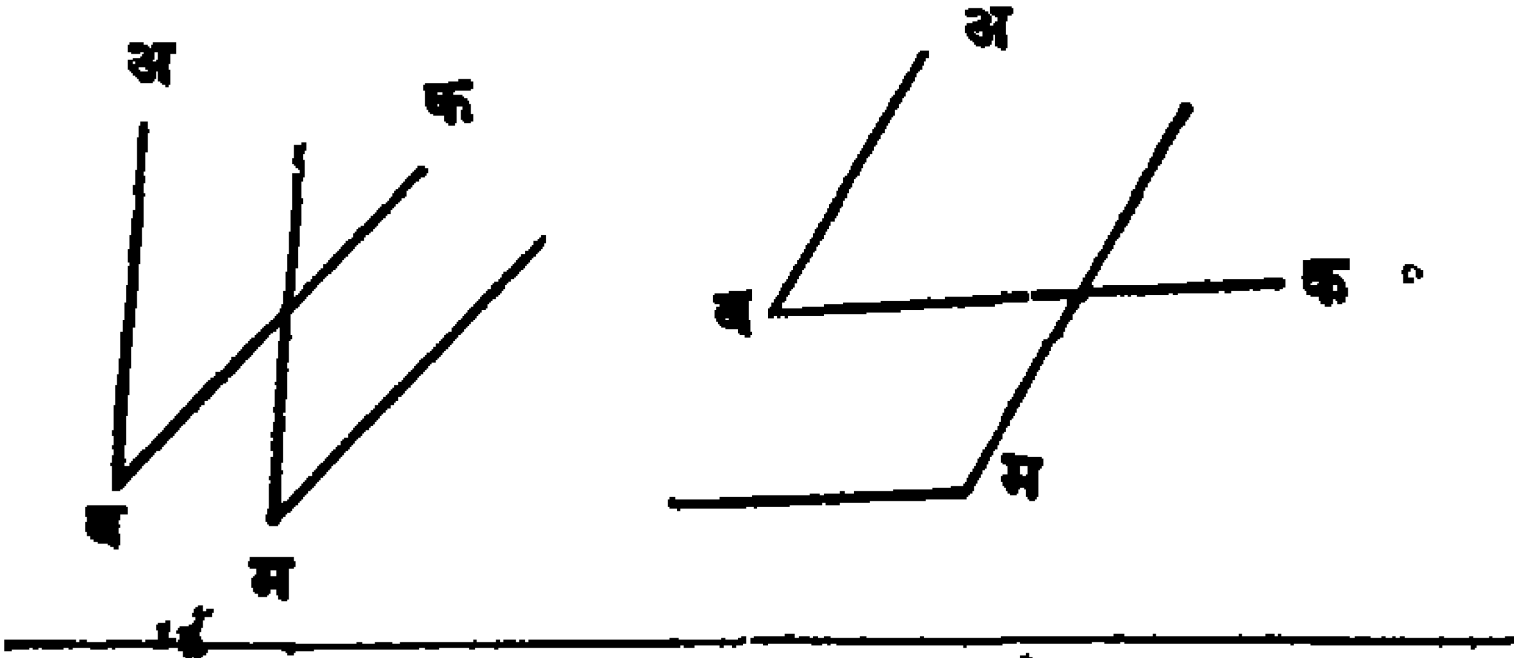
એક **अब** લીટી લો. **अब**ને સમાંતર **कड** લીટી દોરો. **कड**ને સમાંતર **ईफ** લીટી દોરો. **ईफ, अब**ને સમાંતર છે કે ? આ ઉપરથી જે બે લીટીઓ ત્રીજીને સમાંતર હોય છે, તેમના સમાંતરપણા વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? "તેઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે."

એક બીજીને સમાંતર ઘણી લીટીઓ દોરવાની રીતઃ—

જે દિશામાં સમાંતર લીટીઓ દોરવી હોય, તે દિશામાં ત્રિકોણમાપનો એક ભુજ† મૂકીને તેની લગોલગ લીટી દોરવી. (એક આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય તો તે લીટી પર ત્રિકોણમાપનો ભુજ મૂકવો.) પછી પટી કે બીજું ત્રિકોણમાપ લઈને, તેની એક બાજુ પહેલા ત્રિકોણમાપના કાટખુણાના બીજા ભુજને લગાડવી. પછી પહેલા ત્રિકોણમાપને ઉપર કે નીચે જરૂર પ્રમાણે પટીની કે બીજા ત્રિકોણમાપની કોરે કોરે ખસેડીને સમાંતર લીટીઓ દોરવી.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં ગમ ત્યાં ચાર પાંચ બિંદુ લો, અને તે બિંદુઓમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.

સમાંતર ભુજોવાળા ખુણા.



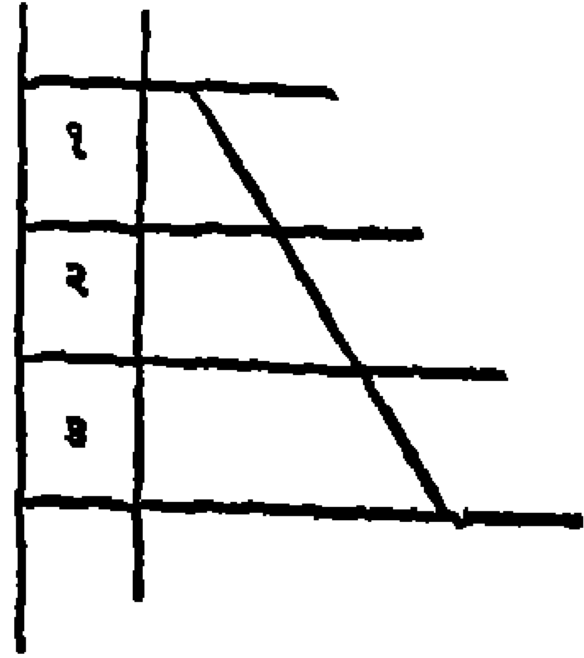
† કાટખુણો કરનારી બે લીટીઓને ભુજ કહે છે.

એક **अबक** ખુણો લો. ગમે તે એક **म** બિંદુ લો. **म**માંથી **बअ, बक**ને સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપો. તેને ∠**अबक** સાથે સરખાવો. તે ∠**अबक** જેવડો ન હોય તો તેને ∠**अबक**માં ઉમેરો અને એનો સરવાળો કેટલો થાય છે તે જુઓ.

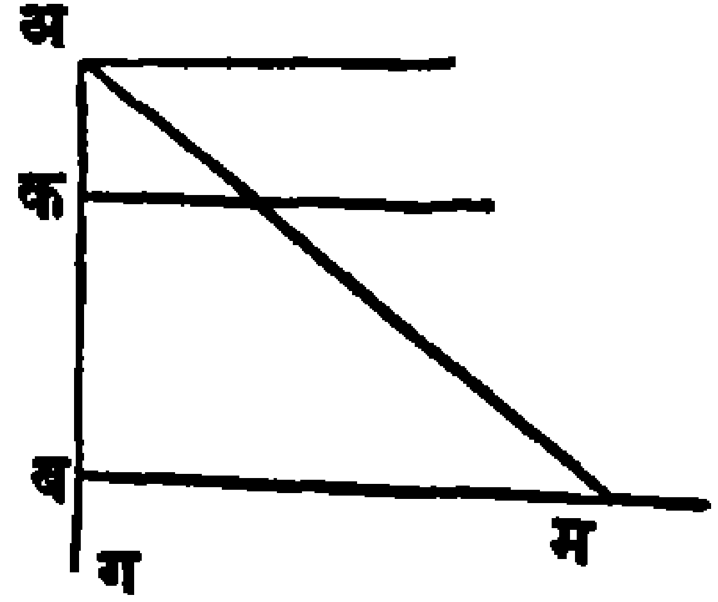
આ ઉપરથી કોઈ ખુણો અને તેના ભુજોને સમાંતર હોય એવી લીટીઓ વચ્ચેનો ખુણો એ બેની વચ્ચેના સંબંધ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે? "આ ખુણા સરખા હોય છે અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે." (ખુણા ક્યારે સરખા હોય છે અને ક્યારે ન્યૂનતાપૂરક હોય છે એનો ખુલાસો આગળ ૯૬ા પ્રમેયની નીચે કર્યો છે.)

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં સરખે અંતરે ત્રણ કે ચાર બિંદુઓ લો, અને તેમાં થઈને જાય એવી સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ બધી સમાંતર લીટીઓને છેદે એવી બીજી ચાર પાંચ લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓ પૈકી પહેલી લીટીના, સમાંતર લીટીઓને લીધે, જે બે કે ત્રણ ગાળાઓ પડે છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે? "ગાળાઓ સરખા છે." એવીજ રીતે બીજી લીટીના ગાળાઓ સરખાવીને શું જણાય છે તે જુઓ. "ગાળાઓ સરખા છે." ત્રીજી અને ચોથી લીટી માટે એવાજ પ્રયોગ કરો (૫૦.) આ ઉપરથી કયો નિયમ જણાઈ આવે છે? **"જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી એક લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી ગમે તે લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય છે."**



अग અને अम લીટીઓ ગમે તેવડો ખુણો કરે એમ દોરો. अग લીટીમાં अथी થોડે અંતરે क બિંદુ લો; ત્યાંથી अकथी બમણે અંતરે ब બિંદુ લો; अ, क, ब, બિંદુમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.



આ લીટીઓને લીધે अमના જે બે ગાળા પડે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે? ઉપલી આકૃતિમાં સમાંતર લીટીઓને છેદનારી ગમે તે લીટી દોરો. તેના સમાંતર લીટીઓને લીધે જે ગાળા પડે છે તેમને સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે?

अग લીટીમાં कब અંતર अकथी ત્રણગણું લો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. આ પ્રયોગ પરથી શું સમજાય છે?

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર.

બે સમાંતર લીટી દોરો. તે બે વચ્ચે ઓછામાં ઓછું અંતર દેખાડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સમાંતર લીટીઓ પૈકી દરેક લીટી સાથે કેવડો ખુણો કરે છે?

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (ઓછામાં ઓછું અંતર) કાઢવા વિષે શો નિયમ સમજાય છે? "સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર તેમની વચ્ચેનો લંબ છે."

એક્સરસાઇઝ બુકમાંની સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર મિલિમીટરમાં કાઢો.

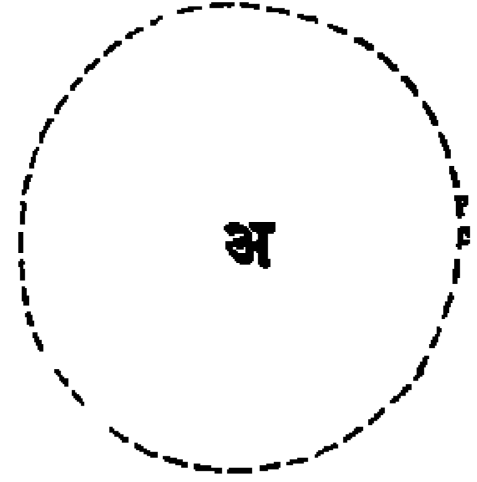
બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમાંથી એક પર લંબ દોરો. તે લંબને બીજી લીટીને છેદતાં સુધી લંબાવો. તે બીજી લીટી પર લંબ છે કે? "હા," આ ઉપરથી શું સમજાય છે? "બે સમાંતર

લીટી પૈકી એક લીટી પર લંબ હોય એવી લીટો બીજી લીટી પર પણ લંબ હોય છે."

ત્રિકોણ.

વર્તુળ.

ચાકની લાકડી ખોસવાના લાકડાના કંપાસની બે અણી વચ્ચે એક ફુટ અંતર રાખવું. પાટીઆ પર એક બિંદુ લઈને તેને અ નામ આપવું. અ બિંદુ પર કંપાસની તીક્ષ્ણ અણી મૂકીને ચાકની અણીથી પાટીઆ પર એક બિંદુ કાઢવું. અથી આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે? "એક ફુટ." પછી તીક્ષ્ણ અણી કાયમ રાખીને (બને અણીઓની વચ્ચેનું



અંતર તેનું તેજ રાખીને ચાકની અણી જરા (ગોળાટમાં) આગળ ખસેડીને બીજું બિંદુ કાઢવું. અથી આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે? "એક ફુટ." એજ પ્રમાણે ચાકની અણી ગોળાટમાં ખસેડીને ટપકાંની લીટીથી વર્તુળ બનાવવું; અને કાઢેલાં ટપકાંનું અંતર અથી સરખુંજ છે (એટલે એક ફુટ છે) એ જવાબ છોકરાઓની પાસે કઢાવવો. પછી કંપાસ ફરીથી પાટીઆ પર મૂકીને ટપકાં પર થઈ જાય એવી રીતે ચાકની અણી ફેરવીને વર્તુળ પુરૂં કરવું. (વર્તુળના પરિઘ પરનું એકાદ બિંદુ બતાવીને) "આનું અથી અંતર કેટલું છે?" "એક ફુટ." (પરિઘ પરનું બીજું કોઈ બિંદુ દેખાડીને) આનું અંતર અથી કેટલું છે? "એક ફુટ." આ લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુનું અંતર અથી એક ફુટ છે એ વાત પરથી વર્તુળના પરિઘ પરનાં બિંદુ અને મધ્યબિંદુ વચ્ચેનાં અંતર વિષે કયો નિયમ જણાઈ આવે છે? "પરિઘ પરનાં સર્વ બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે." તેટલાજ અંતર પરનું (એટલે એક ફુટ અંતરે હોય એવું) બિંદુ પરિઘની અંદર કે બહાર હોવાનો સંભવ છે કે? "ના."

ગોળ આંકણીની આસપાસ બરાબર એક ફેરો થતા સુધી દોરો લપેટો, અને જ્યાં એક ફેરો પુરો થાય ત્યાંથી દોરો કાપી કાઢો. પછી કાપેલા દોરાનો કકડો માપો. (અથવા ગોળ આંકણીની બાજુ પર કંઈ નિશાની કરીને તે આંકણીની એક પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી તે આંકણીને ફુટપટી પર ફેરવો અને ફુટપટી પરનું અતર માપો. પછી તે આંકણીનો વ્યાસ માપો. આંકણીના વ્યાસ અને પરિધ વચ્ચે શું પ્રમાણ હોવાનું જણાઈ આવે છે?)

ભોંય પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ દોરો લપેટીને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

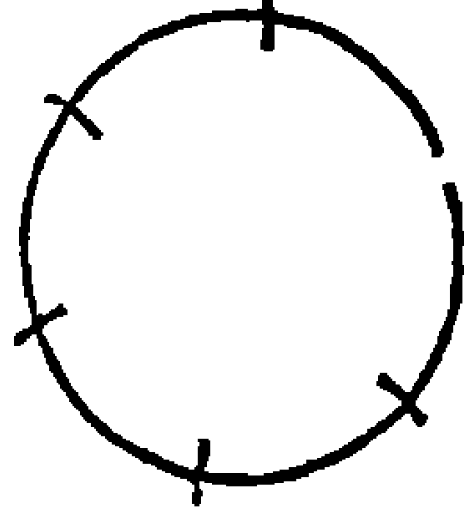
બે ઇંચ વ્યાસનું વર્તુળ કાઢો. પાણીમાં દોરો પલાળીને તેને વર્તુળના પરિધ પર મૂકી પરિધની લંબાઈ માપો. પરિધ વ્યાસથી કેટલાગણો મોટો છે તે જુઓ.

૩·૫", ૯" વ્યાસનાં વર્તુળ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. વ્યાસથી પરિધ કેટલાગણો મોટો હોય છે એ વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે? '૩૧/૭ગણો, અથવા વ્યાસ અને પરિધનું પ્રમાણ ૭ : ૨૨ હોય છે."

કાગળના કકડા પર એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના પરિધ પર **अ,ब,क,ड,ई,फ,ग,...**એ બિંદુઓ ઘણાં પાસપાસે લઈને તેમાં ટાંકણીઓ ખોસો. **अ** આગળ શરૂ કરીને ફરીથી **अ** સુધી આવી પહોંચે ત્યાંલગી ટાંકણીઓની આસપાસ દોરો લપેટો, અને તે બિંદુ આગળ દોરો કાપી કાઢો. આ દોરાની લંબાઈ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી છે, એમ જણાશે. આ લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યાથી કેટલાગણી છે? "સવાછગણી છે."

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાઈ આવશે, કે **अब** અંતર* જેમ જેમ ઓછું લઈએ તેમ તેમ દોરો **अब** કૌંસની વધારે ને વધારે પાસે થઈને જાય છે. આ પરથી એમ જણાઈ આવે છે, કે વર્તુળમાં દોરેલી ઘણી બાજુવાળી આકૃતિની બાજુઓ જો ઘણીજ નાની હોય, તો તે આકૃતિની પરિમિતિ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી હોય છે.

ગમે તેવું એક વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર કંપાસની અણીઓની વચ્ચે રાખીને કંપાસની અણીઓ પરિધ પર મૂકીને પરિધના થાય તેટલા સરખા ભાગ કરો. કેટલા ભાગ થયા ? "૭."



ત્રિજ્યા જેટલી લાંબી જ્યાઓ* વર્તુળમાં એક પુરી થાય ત્યાં બીજી શરૂ થાય એવી રીતે એક પછી એક મૂકી હોય તો તેવી જ્યાઓ એક પુરી પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી, એક વર્તુળમાં કેટલી કાઢી શકાય ? "૭."

વર્તુળ અને ત્રિકોણ.

૨" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨" વ્યાસવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨·૯" ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ૨૨ મિ. મી. ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.

આ સ્થળે રાખેલી તોપનો ગોળો ચાર માઇલ સુધી જાય છે, તો તે તોપના ગોળાની મર્યાદામાં આવતા પ્રદેશની હદ દેખાડો. (સ્કેલ–૧ માઇલ=$\frac{1}{2}$".)

બે કિલ્લા વચ્ચે ૯ માઇલનું અંતર છે. દરેક કિલ્લા પરની તોપનો મારો ૭ માઇલ સુધી પહોંચે છે; તો બંને કિલ્લા પરની તોપના મારામાં જે સામાન્ય પ્રદેશ આવે છે તેની હદ દેખાડો. (સ્કેલ–૫ મિ. મી.=૧ માઇલ.)

એક વર્તુળાકાર બાગનો વ્યાસ ૫૦ ફુટ છે. એક માળી તે બાગની કોર પર હાથમાં પાણીની નળી લઈને ઉભો છે. જો નળીમાંથી પાણી ૩૦ ફુટ આઘું ઊડી શકે, તો જ્યાં માળી ઉભો રહ્યો છે તે જગા પરથી તે બાગનો કેટલો ભાગ પલાળી શકશે, એ આકૃતિ કાઢીને બતાવો. (સ્કેલ–૧ મિ. મી =૧ ફુટ.)

---

* પરિધ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુને સાંધનારી લીટીને જ્યા કહે છે.

એક બીજાથી ૧·૫" અંતરે **अ** અને **ब** બિંદુઓ લો. **अ**થી ૧·૫" અંતરે હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગા એક લીટીથી બતાવો. (આ લીટી, ૧·૫" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ થશે.) **ब**થી ૧·૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી બતાવો. **अ** ને **ब**, એ બંને બિંદુથી ૧·૫" અંતરે કેટલાં બિંદુ છે? "બે." તેમને **क** ને **ड** કહો. તેમને **अ**, **ब** સાથે સાંધો. **अब**, **बक**, **कअ** અને **अब**, **बड**, **डअ** લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે?

अ ને **ब** એ બે બિંદુઓ એક બીજાથી ૧·૭" આઘાં છે. **अ**થી ૨" દૂર હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગાઓ બતાવો. **ब**થી ૧·૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી દેખાડો. **अ**થી ૨" અને **ब**થી ૧·૫" આઘું કયું બિંદુ છે? એવાં બિંદુઓ બધાં મળીને કેટલાં છે? "બે." તેમને **क** ને **ड** કહો. **अक** અને **बक**ની લંબાઈ કેટલી છે? તેમજ **अड** અને **बड**ની લંબાઈ કેટલી છે?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી આપેલાં બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવાની કઈ રીત જણાઈ આવે છે? (અર્થાત્ બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવું હોય તો તે કેમ કાઢવું?) આ બિંદુઓ સાંધવાથી જે આકૃતિ થાય છે, તેને કેટલી બાજુઓ હોય છે? કેટલા ખુણા?

अ,**ब** બિંદુઓ એક બીજાથી ૧·૨" અંતરે છે. **अ**થી ૨" અને **ब**થી ૧·૬" અંતરે હોય એવું **क** બિંદુ શોધી કાઢો. **अब**,**बक**,**अक**, એ બિંદુઓ સાંધો. **अब**,**बक**,**कअ**ની લંબાઈ કેટલી? **अबक** એ કઈ આકૃતિ છે?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, જેની **अब**,**बक**,**अक** બાજુઓની લબાઈ આપેલી હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવા વિષે કયો નિયમ નીકળે છે?

ઉપલા પ્રયોગમાંની આકૃતિમાંના **अबक** અને **अबड** ત્રિકોણમાં કંઈ સરખાપણું હોવાનું જણાઈ આવે છે કે?

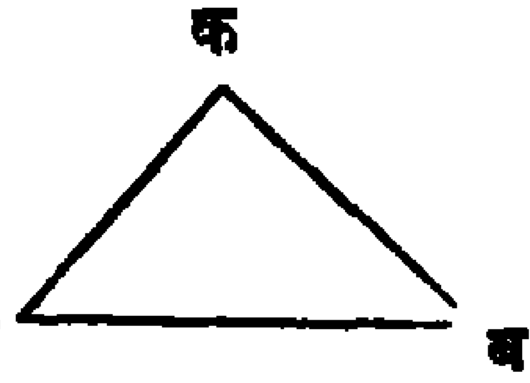
નીચે આપેલાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ કાઢો:—

अब	૧·૪"	**बक**	૨"	**कअ**	૨·૫";
,,	૨·૧"	,,	૧·૯"	,,	૩·૨";

अब	૪·૧"	बक	૪·૨"	कअ	૪·૩";
„	૪૧ મિ. મી.	„	૪૨ મિ. મી.	„	૪૩ મિ. મી.
„	૩૨ „	„	૧૮ „	„	૨૦ „
„	૬૯ „	„	૧૧૪ „	„	૫૮ „

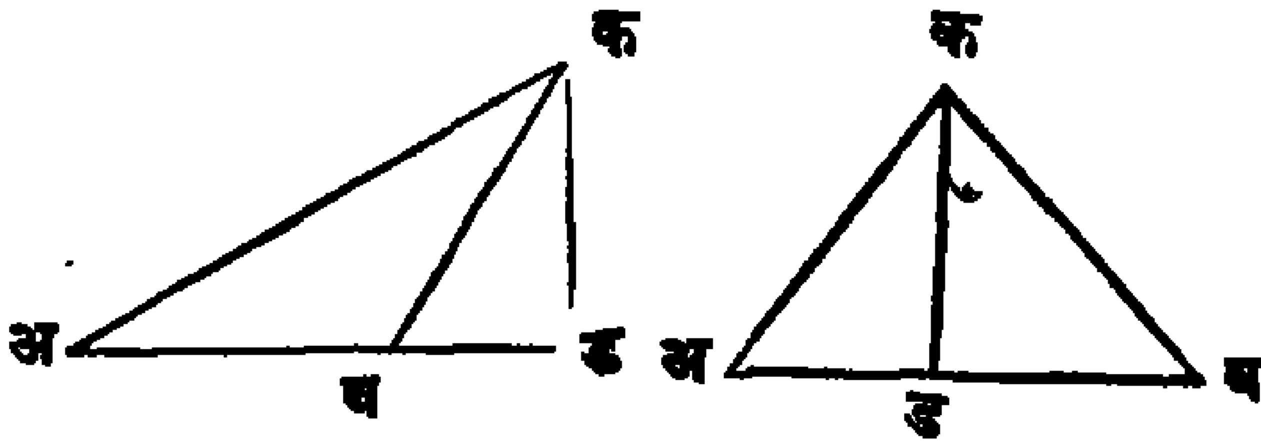
(કેટલીક) વ્યાખ્યાઓ.

ત્રિકોણ જે બાજુ પર ઉભો છે એમ આપણે ધારીએ છીએ, તે બાજુ તેનો પાયો કહેવાય છે. **अबक** ત્રિકોણ **अब** બાજુ પર છે એમ ધાર્યું હોય, તો **अब** તેનો પાયો થાય; પણ તે **बक** પર ઉભો છે એમ ધાર્યું હોય તો **बक** તેનો પાયો થાય.



ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો કહે છે.

ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તેની ઉંચાઈ કહે છે. પાસેના ત્રિકોણમાં **कड**, **अबक** ત્રિકોણની ઉંચાઈ છે.



ત્રિકોણની બાજુઓ સરખી હોય કે ન હોય, તે પરથી ત્રિકોણના કેટલા પ્રકાર થઈ શકે?

"(૧) જેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય એવા;
(૨) જેમની ફક્ત બે બાજુઓ સરખી હોય એવા;
(૩) જેમની કોઈ પણ બાજુઓ સરખી ન હોય એવા."

(જેમની એકજ બાજુ સરખી હોય એવા ત્રિકોણ હોઈ શકે? એવો કોઈ પ્રકાર છે એમ ધારવામાં શી ભૂલ થશે?)

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ સરખી હોય તેને **સમબાજુ ત્રિકોણ** કહે છે.

જે ત્રિકોણની બે બાજુ સરખી હોય તેને **સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ** કહે છે.

દરેક સમબાજુ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે, પરંતુ દરેક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ હોતો નથી.

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ અસમાન એટલે વિષમ હોય તેને **વિષમબાજુ ત્રિકોણ** કહે છે.

કેટલાક સમબાજુ, કેટલાક સમદ્વિબાજુ, અને કેટલાક વિષમબાજુ ત્રિકોણ પ્રથમ વિભાજક અને પટીની મદદથી અને પછી તેમની મદદ સિવાય (એટલે એકલા હાથે) દોરો.

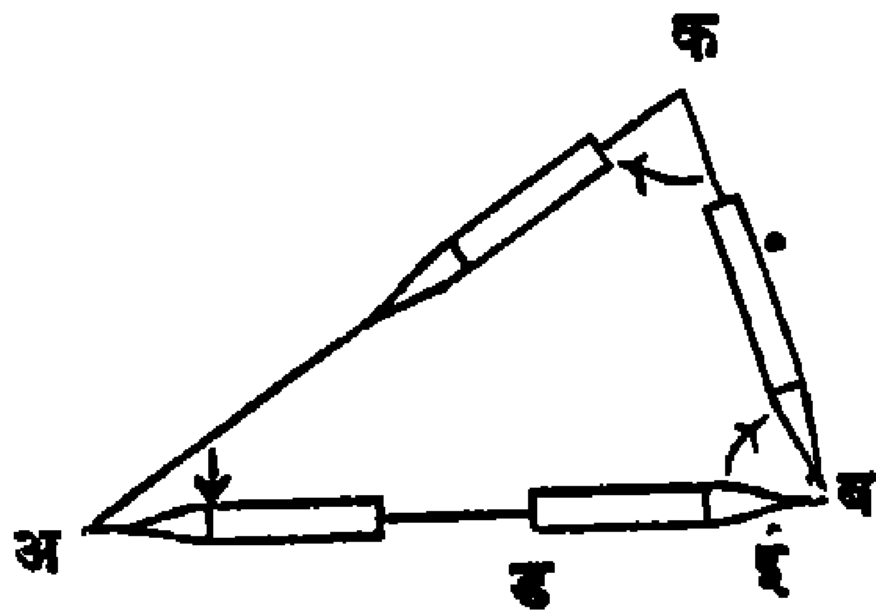
ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો.

ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણાને નિશાની કરીને તેમને ચપ્પુથી કાપી કાઢો, અને તેમને એક બીજાની લગોલગ મૂકો, તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?

ગમે તેવો ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણા કોણમાપકથી માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? આ ઉપરથી ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? **"ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે."**

ત્રિકોણના અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ બતાવવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો.

अबक એક ત્રિકોણ છે એમ ધારો. **डई** એક પેન્સિલ છે, અને તેની **ई** અણી **ब** તરફ છે. આ પેન્સિલને **अब** બાજુમાં **ब** સુધી ખસેડો. તે બિંદુ આગળ **ड** છેડાને **अबक** ખુણા જેટલો ફેરવીને **ईड**, **बक** પર પડે એમ કરો. પછી પેન્સિલને



क તરફ ખસેડો; અને ड છેડો कને અડકે, એટલે ई છેડાને बकअ ખુણા જેટલો ફેરવો. પછી પેન્સિલને अ તરફ ખસેડો; અને ई છેડો अને અડકે, એટલે ड છેડાને कअब ખુણા જેટલો ફેરવો. પેન્સિલને अब લીટીમાં ખસેડીને પ્રથમ સ્થળે લાવો. હવે પેન્સિલની ई અણી કઈ દિશામાં છે? "अ તરફ." પહેલાં કઈ દિશામાં હતી? "ब તરફ." આ પરથી ई અણી પ્રથમ હતી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં ગઈ છે એમ જણાઈ આવે છે. અણીની દિશા બદલતી વખતે પેન્સિલ કેવી રીતે ફરતી ગઈ એ ધ્યાનમાં લો, અને તે પરથી डई પેન્સિલ કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી તે કહો. "તે બે કાટખુણામાં થઈને ફરી છે." અર્થાત્ ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે, એમ આથી સિદ્ધ થાય છે.

પ્રશ્ન.

જે ત્રિકોણના બે ખુણા નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો ત્રીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ તે કહો:—

૧૦૦°, ૫૦°; ૭૦°, ૪૦°; ૧૧૨°, ૧૮°; ૩૦°, ૪૦°.

જો ત્રિકોણોના બબ્બે ખુણા સરખા હોય, અને જેમનો ત્રીજો ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તેમના બાકીના ખુણા કેવડા હોવા જોઈએ?:—

૪૦°, ૫૬°, ૧૦°, ૧૫°, ૮૫°.

ઉપલી સંખ્યાઓ ત્રિકોણોના બે સરખા ખુણામાંનો એક ખુણો દર્શાવે છે, એમ ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવાનો પ્રયત્ન કરો.

જેના સઘળા ખુણા સરખા છે, એવા ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

નીચે આપેલા અંશના ખુણાવાળા ત્રિકોણ કાઢી શકાશે કે?

(૧) ૯૦°, ૬૦°, ૩૦°. (૨) ૭૭°, ૮૪°, ૨૦°.

(૩) ૫૯°, ૬૦°, ૬૧°, (૪) ૧૩૫°, ૨૨°, ૨૨°.

(૫) ૭૩°, ૭૩°, ૩૩°. (૬) ૫૪°, ૫૪°, ૭૨°.

જે ત્રિકોણ કાઢી શકાય એવા ન હોય તેમના સંબંધમાં કારણ આપો.

જેનો ત્રિકોણ બની ન શકે, એવા ત્રણ ત્રણ ખુણાના કેટલાક સટ અથવા સમુદાય આપો.

એક સીધી લીટીને બંને છેડે કાટખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીએ, તો તે ત્રણ લીટીઓના ત્રિકોણ બનશે કે?

એક સીધી લીટીના બંને છેડા આગળ પહોળો ખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીને પહોળા ખુણાની બાજુએ ત્રિકોણ બનાવી શકાય કે?

જેમના ત્રણ ખુણા અનુક્રમે નીચે આપેલા પ્રકારના છે, એવા ત્રિકોણ દોરવાને તમને કહ્યું છે. એ પૈકી કયા ત્રિકોણો કાઢી શકાશે તે કહોઃ—

	પહેલો ખુણો.	બીજો ખુણો.	ત્રીજો ખુણો.
(૧)	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૨)	કાટખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૩)	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૪)	પહોળો ખુણો,	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૫)	પહોળો ખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૬)	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.

વ્યાખ્યા.

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કેટલા ખુણા કાટખુણા અથવા પહોળા ખુણા હોઈ શકે? "એક ત્રિકોણમાં એકથી વધારે કાટખુણા હોઈ શકતા નથી"; તેથી—

(૧) ત્રિકોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને **કાટખુણ ત્રિકોણ** કહે છે.

ત્રિકોણમાં એકથી વધારે પહોળા ખુણા હોઈ શકતા નથી, તેથી—

(૨) ત્રિકોણનો એક ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને **પહોળખુણ ત્રિકોણ** કહે છે.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા કેટલા સાંકડા ખુણા હોવાજ જોઈએ? "બે."

હવે કેવા ત્રિકોણને સાંકડખુણુ ત્રિકોણુ કહેવો જોઈએ? કોઈ પણ ત્રિકોણુમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડા ખુણા હોવા જોઈએ, એમ ઉપર કહ્યું છે; ત્યારે જે ત્રિકોણુમાં બેજ ખુણા સાંકડા ખુણા હોય, તેને સાંકડખુણુ ત્રિકોણુ કહીએ તો ચાલે કે? એમ કહેવામાં શી ભૂલ થશે? ઉપર કહેલા ત્રિકોણુના વર્ગોમાંથી કયા વર્ગના ત્રિકોણુનો એ નામમાં ખોટી રીતે સમાવેશ થશે? જે ત્રિકોણુને કાટખુણુ ત્રિકોણુ અથવા પહોળખુણુ ત્રિકોણુ એ બેમાંથી એકે નામ ન અપાતાં ફક્ત સાંકડખુણુ ત્રિકોણુ એજ નામ આપી શકાય, એવા ત્રિકોણુમાં સાંકડા ખુણા કેટલા હોવા જોઈએ? "ત્રણુ." આ પરથી સાંકડખુણુ ત્રિકોણુની વ્યાખ્યા તમે શી આપશો?

(૩) જે ત્રિકોણુના ત્રણે ખુણા સાંકડા હોય છે, તેને **સાંકડખુણુ ત્રિકોણુ** કહે છે.

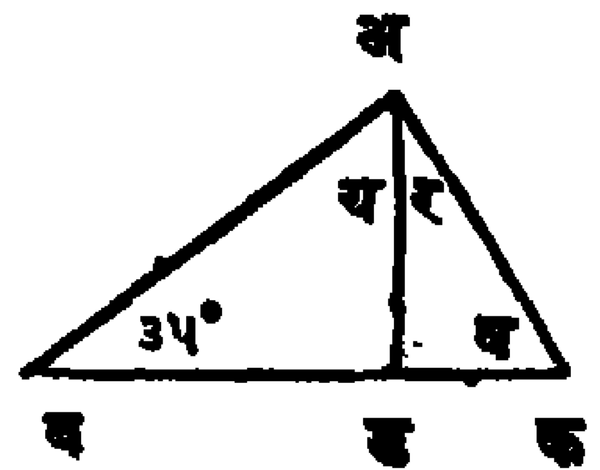
૬૬મા અને ૬૭મા પાના પર આપેલા ત્રિકોણુ જુઓ, અને તે પૈકી દરેક ત્રિકોણુ, ઉપર કહેલા ત્રણુ પ્રકાર પૈકી કયા પ્રકારનો છે તે કહો.

એક કાટખુણુ ત્રિકોણુનો એક ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો બાકીના ખુણા કેવડા હોય તે કહો:—

૪૦°, ૫૦°, ૬૩°, ૧૭°, ૫૮°, ૨૬°, ૩૯°, વગેરે.

ઉપલા પ્રશ્ન પરથી, કાટખુણુ ત્રિકોણુના સાંકડા ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં કયો નિયમ સમજાય છે? તેમનો સરવાળો એક કાટખુણો થાય છે, એટલે કાટખુણુ ત્રિકોણુમાંના સાંકડા ખુણા એક બીજાના કોટિખુણા હોય છે."

પાસેના **अबक** ત્રિકોણુમાં ∠ **बअक** = ૯૦° અને **अड**, **बक** પર લંબ છે. જો ∠ **ब** = ૩૫° હોય તો ∠**य**.∠**र**.∠**व**, કેવડા હોવા જોઈએ?



ઉપલા પ્રશ્નમાં ∠ ब નીચે આપેલા અંશનો છે, એમ ધારીને ∠ य, ∠ र, ∠ ल ખુણા કાઢોઃ—

૩૦°, ૨૫°, ૩૭°, ૪૫°, ૫૩°.

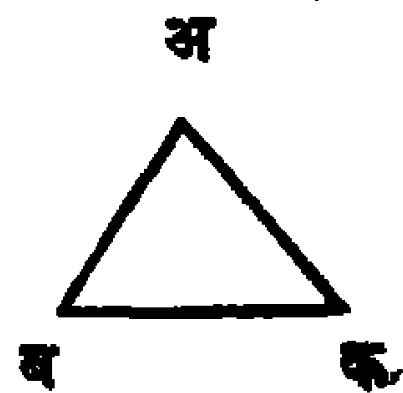
ત્રિકોણના બહારના ખુણા.

એક **अबक** ત્રિકોણ લો. તેની ગમે તે બાજુ (દાખલા તરીકે **बक** ને **ड** સુધી વધારો. **अकड** ખુણાને **अबक** ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો કહે છે. ત્રિકોણની બધી બાજુઓ બંને છેડા તરફ વધારી હોય, તો છ બહારના ખુણા થાય છે. પણ એવી રીતે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ આગળ જે સામસામા બબ્બે ખુણા થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર હોય છે; માટે આ જોડમાંના ગમે તે એક ખુણાને તે શિરોબિંદુ આગળનો બહારનો ખુણો ગણવાનો રિવાજ છે. તે છતાં પણ કોઈ ત્રિકોણના બહારના ખુણા એટલે કયા ખુણા સમજવા એ વિષે શક ન પડે, એટલા માટે ત્રિકોણના બહારના ખુણા વિષે નીચેનો સંકેત નક્કી કરેલો છેઃ—

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને એકજ ક્રમે વધારી હોય, તો તે બાજુઓ આગળ થતા બહારના ખુણાઓને તે ત્રિકોણના બહારના ખુણા કહે છે. દાખલા તરીકે, ૭૪મા પાના ઉપરની આકૃતિમાં **अकई**, **बअफ**, અને **कबग**, એ **अबक** ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે.

ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે તે ત્રણ પૈકી બે ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો? "ત્રીજો ખુણો."

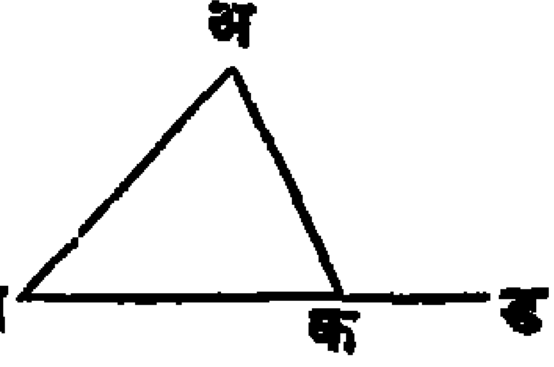
પાસેની આકૃતિમાં (∠ **बअक** + ∠ **अकब**)નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો? (∠ **अकब** + ∠ **कबअ**)નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો?



∠ **कबअ**ના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા?

∠ **बअक**ના કયા? ∠ **अकब**ના કયા?

ગમે તે એક **અબક** ત્રિકોણ દોરો. **બક** બાજુને **ड** સુધી લંબાવો.



∠**अकब**+∠**अकड**=૨ કાટખુણા, તો ∠**अकब**નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો? "∠**अकड**." આગલા પ્રયોગ પરથી ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કયા ખુણા ∠**अकब**ના ન્યૂનતાપૂરક છે એમ જણાય છે? "∠**कबअ** + ∠**बअक**." આ પરથી ∠**कबअ**, ∠**बअक** એમનો સરવાળો અને ∠**अकड**, એ બેની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે?

આ પરથી ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો અને બહારના ખુણાની પાસેના અંદરના ખુણા સિવાયના બાકીના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો, એમની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે?

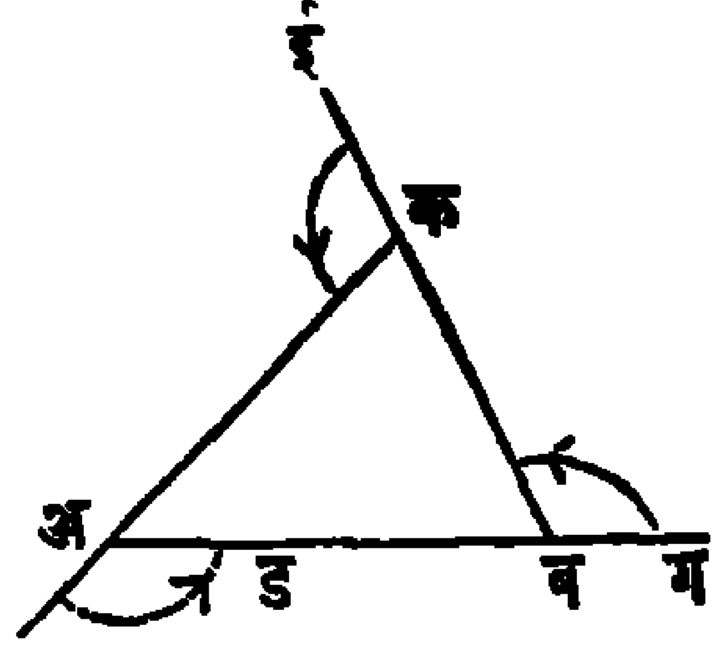
"ત્રિકોણનો કોઈ પણ બહારનો ખુણો, તેની લગોલગ ન હોય એવા અંદરના બે ખુણાના સરવાળા બરાબર હોય છે."

ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ એક તરફથી વધારી હોય, તો જે બહારના ખુણા થાય છે તે માપો, અથવા તેમને કાપી કાઢીને પાસપાસે મૂકો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? "ચાર."

ત્રિકોણમાંનો દરેક ખુણો અને તેની પાસેનો બહારનો ખુણો એ બેનો સરવાળો કેટલો છે? "બે કાટખુણા." એ પ્રમાણે ત્રિકોણની અંદરના ત્રણ ખુણા અને તેમની પાસેના બહારના ત્રણ ખુણા, એ બધાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે? "છ." ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણા મળીને જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, ત્યારે આ પરથી બહારના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો કેટલો હોવો જોઈએ, એ વિષે તમે કંઈ અનુમાન કરી શકો છો? "એ સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ."

ત્રિકોણના બહારના ખુણા ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ કરવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો. ધારો કે **अब**,**बक**,**अक**, એ ત્રણ રસ્તાથી એક ત્રિકોણ બને છે. **ड** સ્થળથી એક ગાડી **ब** તરફ જવા નીકળે છે. આ ગાડી **ब** પાસે આવશે, એટલે **बक** રસ્તે જવા માટે તેને પોતાનું મોઢું ટપકાંથી દેખાડેલા **ब** ખુણા જેટલું ફેરવવું



પડશે. ગાડી **क** પાસે જશે ત્યારે ટપકાંથી દેખાડેલા **क** ખુણા જેટલું તેને પોતાનું મોઢું ફેરવવું પડશે. ગાડી **कअ** રસ્તે **अ** પાસે ગયા પછી ત્યાં તેને ટપકાંથી દર્શાવેલા **अ** ખુણા જેટલું મોં ફેરવવું પડશે. હવે જો ગાડી સીધી આગળ જશે તો તે **ड** બિંદુ પાસે જઈ પહોંચશે.

ધારો કે **बअ** લીટી બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. આ પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે, કે ગાડી પ્રથમ નીકળી ત્યારે તેનું મોં પૂર્વ તરફ હતું, તે **ब** પાસે ગઈ ત્યારે તેનું મોં ઉત્તર તરફ ફર્યું. તે **क** પાસે ગઈ ત્યારે......વગેરે. એ પ્રમાણે તેનું મોં ધીમે ધીમે ઉત્તર, પશ્ચિમ, દક્ષિણ, એ દિશા તરફ ફર્યું, અને આખરે પૂર્વ તરફ આવ્યું. આ ઉપરથી ગાડીના મોંએ એક પુરી પ્રદક્ષિણા કર્યા જેવું થાય છે. પૂર્ણ પ્રદક્ષિણા કરી એટલે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યા જેવું થાય છે (આ ઘડિઆળના કાંટાની મદદથી બતાવી શકાશે), માટે ગાડીનું મોં ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યું છે, એમ માનવાને અડચણ નથી. ગાડીનું મોં જે ખુણામાં થઈને ફર્યું, તે ખુણા તો **अबक** ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે. **अबक** ત્રિકોણ ગમે તે પ્રકારનો લીધો હોય, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પરિણામ આવે છે. આ ઉપરથી ત્રિકોણના બહારના બધા ખુણા મળીને ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ થાય છે.

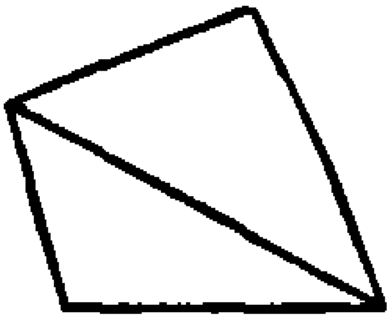
બહુકોણાકૃતિના બહારના ખુણાનો સરવાળો.

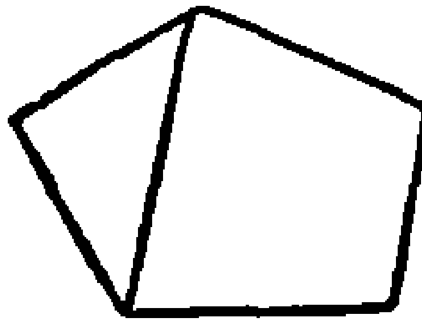
વ્યાખ્યા—ચારથી વધારે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાઇ હોય એવી કોઈ પણ આકૃતિને બહુકોણાકૃતિ કહે છે.

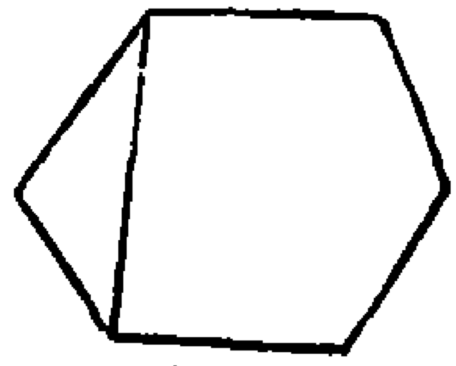
ચાર સીધી લીટીથી જેની હદ બંધાઈ હોય એવી આકૃતિને ચતુષ્કોણ કે ચોખુણ કહે છે.

પાંચ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને પંચકોણ કહે છે.

૭ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને ષટ્કોણ કહે છે.


ચતુષ્કોણ.


પંચકોણ.


ષટ્કોણ.

સાત સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને સપ્તકોણ કહે છે.

આઠ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને અષ્ટકોણ કહે છે.

ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ લો. તેની બધી બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એમ કરવાથી થએલા બધા બહારના ખુણા કાપીને અથવા કોણમાપક વડે માપીને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? "ચાર".

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, અષ્ટકોણ, વગેરે આકૃતિઓ લઈને તેમના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તેમના બહારના ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે તમને કોઈ નિયમ જણાઈ આવે છે? "આ સર્વ આકૃતિઓના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે."

૭૪મા પાના પરના ત્રિકોણના સંબંધમાં કરેલા પ્રયોગ જેવો પ્રયોગ કરીને ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ, વગેરેના બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે એ બતાવો.

બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.

પહેલી રીત—ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એક બાજુ વધારવાથી જે બહારનો ખુણો થાય છે, તે અને તેની પાસેનો આકૃતિનો અંદરનો ખુણો, એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે? "બે કાટખુણા." એક બાજુ વધારવાથી જે બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના અને અંદરના બધા ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે? "આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેટલીના બમણા કાટખુણા બરાબર." તેમાંથી બહારના ખુણાઓનો સરવાળો બાદ કરો. બાદબાકી રહી તે શાનો સરવાળો આવ્યો? "અંદરના ખુણાઓનો." તે કેટલો છે? 'ચાર કાટખુણા."

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ, વગેરેના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો.

પચકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

(૫×૨=૧૦; ૧૦–૪=૬)

ષટ્કોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

(૬×૨=૧૨; ૧૨-૪=૮)

સપ્તકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

(૭×૨=૧૪; ૧૪–૪=૧૦).

પંદર બાજુવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો...... ......વગેરે.

આ પરથી ગમે તે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓના સરવાળા માટે શો નિયમ નીકળે છે? **"બાજુની બમણાઈ કરી તેમાંથી ચાર બાદ કરવા; બાદબાકી આવે તેટલા કાટખુણા સમજવા."**

કોઈ પણ બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે એ કાઢવાની **બીજી રીત**—

કોઈ પણ આકૃતિનો પહેલો અને ત્રીજો એ ખુણા સાંધવા, અને નીચેની રીતે ખુણાઓનો સરવાળો કરવો.

ચતુષ્કોણ=૨ ત્રિકોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨ + ૨ કાટખુણા = ૪ કાટખુણા.

પંચકોણ=ત્રિકોણ+ચતુષ્કોણ; ખુણાનો સરવાળો=૨+૪ કાટખુણા= ૬ કાટખુણા.

ષટ્કોણ=ત્રિકોણ+પંચકોણ; ખુણાઓનો સરવાળો=૨+૬ કાટખુણા =૮ કાટખુણા.

સપ્તકોણ=ત્રિકોણ+ષટ્કોણ; ખુણાઓનો સરવાળો=૨+૮ કાટખુણા =૧૦ કાટખુણા.

ત્રીજી રીત—ત્રિકોણની અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે એ સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં જે પેન્સિલનો પ્રયોગ કર્યો છે, તે ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, વગેરે આકૃતિઓના સંબંધમાં કરો; અને પેન્સિલની અણીની પ્રદક્ષિણા કેટલી થાય છે તે જુઓ. આ પરથી બહુકોણાકૃતિના ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં ઉપર જે નિયમ આપ્યો છે તે સિદ્ધ થશે.

ચોથી રીત—આપેલી (**क्ष** બાજુની) બહુકોણાકૃતિની અંદર એક **अ** બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી બહુકોણાકૃતિના શિરોબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરો. એટલે બહુકોણાકૃતિને જેટલી બાજુ છે તેટલા (એટલે **क्ष**) ત્રિકોણ થશે. તે ત્રિકોણોના ખુણાનો સરવાળો = **क्ष**× ૨ કાટખુણા. તેમાંથી **अ** બિંદુ પાસેના ખુણા = ૪ કાટખુણા. માટે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાનો સરવાળો = (**क्ष**×૨)−૪ કાટખુણા છે.

પ્રશ્ન.

अबकड ચતુષ્કોણના ∠**अ**, ∠**ब**, ∠**क**, અનુક્રમે

૪૫, ૫૫,ને ૧૦૦;	અંશના છે, તો ∠**ड** કેટલા અંશનો ?
૧૦૦, ૫૦,ને ૧૧૦;	
તથા૧૨૦,૧૦૦,ને૧૨૦;	

એક ચતુષ્કોણના બે ખુણા ૧૦૦° અને ૪૦° છે, અને બાકીના ખુણા સરખા છે; તો તે કેટલા કેટલા અંશના છે ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં પહેલા બે ખુણા અનુક્રમે ૫૩° અને ૨૭°, ૯૦° અને ૮૦°, ૧૧૦° અને ૨૮° ધારીને ઉત્તર આપો.

નિયમિત†પંચકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોય છે?

નિયમિત ષટ્કોણનો કેવડો? નિયમિત સપ્તકોણનો કેવડો?

નિયમિત અષ્ટકોણનો કેવડો?

નિયમિત પંચકોણ, ષટ્કોણ, અષ્ટકોણ, અને દસકોણનો બહારનો દરેક ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે?

એક ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાનો સરવાળો ૧૬૦° છે, તો બાકીના બે ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો કેવડો છે?

એક પંચકોણના ચાર ખુણા સરખા છે, અને પાંચમો ખુણો બાકીના દરેક ખુણાથી અર્ધો છે; તો તે ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ?

अबकडईफ ષટ્કોણમાંના **अ**, **क**, અને **ई** ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનો દરેક ખુણો **ब**, **ड** કે **फ** ખુણાથી બમણો છે (અર્થાત્ **ब**, **ड**, અને **फ** એક બીજાની બરાબર છે); તો **अ** ખુણો કેવડો છે?

એક બહુકોણાકૃતિનો દરેક ખુણો ૧$\frac{3}{4}$ કાટખુણા બરાબર છે, તો તે આકૃતિની બાજુઓ કેટલી? (બહારનો ખુણો કેવડો છે તે નક્કી કરી તે ઉપરથી બાજુઓની સંખ્યા નક્કી કરો.

ત્રિકોણોની એકરૂપતા.*

(ત્રિકોણ એકરૂપ સિદ્ધ કરવા માટે કઈ શરતો જરૂરની છે એ વિષે.)

अब અને **डई** બે સરખી લીટીઓ લો. **अब**ના **अ** બિંદુ પાસે ગમે તેટલો મોટો ∠**अबक** કરો. ∠**डईफ**, ∠**अबक** જેવડો

† જે આકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી અને બધા ખુણા સરખા હોય તેને નિયમિત આકૃતિ કહે છે.

*એકરૂપ એટલે બધી બાબતમાં સરખા. બધી બાબતો એટલે ખુણા, બાજુઓ, અને ક્ષેત્રફળ.

કરો. **બક** ગમે તેટલી લાંબી લો. તેટલીજ લાંબી **ઈફ** લો. **કઅ**, **ફડ** સાંધો. **અબ**, **ડઈ** પર અને **બક**, **ઈફ** પર પડે એવી રીતે **અબક** ત્રિકોણુ **ડઈફ** ત્રિકોણુ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણુ એકરૂપ છે કે? "છે." (પુ). આ પરથી ત્રિકોણુની એકરૂપતા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

"એક ત્રિકોણુની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો અનુક્રમે બીજાની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણુ એકરૂપ હોય છે."

અબ જેવડી **ડઈ** લીટી લો. ∠**અબક**, ∠**બઅક** ગમે તેટલા મોટા ખુણા લઈને **અબક** ત્રિકોણુ પુરો કરો. ∠**અબક**, ∠**બઅક** જેવડા અનુક્રમે ∠**ડઈફ**. ∠**ઈડફ** કરો. **અબ**, **ડઈ** પર અને **બક**, **ઈફ** પર પડે એવી રીતે **અબક** ત્રિકોણુ **ડઈફ** ત્રિકોણુ પર મૂકો. (પુ૦). તે બે ત્રિકોણુ એકરૂપ છે કે? "છે." આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

"એક ત્રિકોણુની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણુની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણાની બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણુ એકરૂપ હોય છે."

એક ગમે તેવો **અબક** ત્રિકોણુ દોરો. **ડઈ** બાજુ **અબ** જેવડી દોરો. **ડઈફ** ખુણો **અબક** ખુણા જેવડો કરો. **અકબ** ખુણા જેવડો કાગળનો કકડો કાપી કાઢો. આ ખુણો **ઈફ**ને લગાડીને એવી લીટી દોરો, કે તે **ઈફ**ની સાથે ∠**અકબ** જેવડો ખુણો કરે. એ લીટી **ડ**માં થઈને જશે. એવી રીતે **ડઈફ** ત્રિકોણુ દોર્યા પછી **અબ**, **ડઈ** પર અને **બક**, **ઈફ** પર પડે એવી રીતે **અબક** ત્રિકોણુ **ડઈફ** ત્રિકોણુ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણુ એકરૂપ છે કે? "છે." (પુ૦). આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

"એક ત્રિકોણુના બે ખુણા અને તેમાંના એકની સામેની બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણુના તેમને મળતા ભાગોની

(એટલે બીજાના બે ખુણા અને પહેલા ત્રિકોણના જે ખુણાની સામેની બાજુ લીધી છે તે ખુણાની બરાબર બીજા ત્રિકોણનો જે ખુણો છે તેની સામેની બાજુની) બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે."

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી, બે ત્રિકોણ એકરૂપ થવા માટે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અને ત્રણ ખુણા એ પૈકી ઓછામાં ઓછા કેટલા ભાગ મળતા આવવાજ જોઈએ, તે કહો. "ત્રણ." કયા ત્રણ ? (૧) "બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો; (૨) એક બાજુ અને બે ખુણા."

ત્રિકોણમાં સરખી બાજુની સામેના ખુણા અને સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ.

બે બાજુ સરખી લંબાઈની અને ત્રીજી બાજુ જરા નાની કે મોટી લઈને એક ત્રિકોણ કરો. સરખી બાજુ એક બીજી પર પડે એવી રીતે ત્રિકોણ વાળો; એટલે સરખી બાજુની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહેશે. (૫૦). આ ઉપરથી સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંના સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે, એમ જણાઈ આવશે. સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા કોણમાપક વડે માપો, અને તેમને સરખાવો. તમને શું જણાય છે ? "તે સરખા છે." આ ઉપરથી ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુની સામેના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળે છે ? **"સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે."**

એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેના ખુણા પર નિશાની કરો અને તે કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા જોડે સરખાવો. આ ખુણા વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે ? "દરેક ખુણો ૬૦°નો છે.

આ ઉપરથી સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે ? **"સમબાજુ ત્રિકોણના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને દરેક ખુણો ૬૦°નો હોય છે."**

એક ગમે તેટલી લાંબી **अब** લીટી લેા. ∠ **अबक** ગમે તેવડેા સાંકડેા ખુણેા લેા. ∠**अबक** જેવડેા ∠**बअक** કરેા. **अक** અને **बक** માપેા. આ પ્રયેાગ ત્રણ ચાર વખત જુદી જુદી રીતે કરેા. ત્રિકેાણના બે સરખા ખુણાએાની સામેની બાજુએા કેવી હેાય છે, એ વિષે તમને શું સમજાય છે?

"ત્રિકેાણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુએા સરખી હેાય છે."

अब=૨", ∠**अबक**=૬૦°, અને ∠**बअक**=૬૦° લઈને ત્રિકેાણ પુરેા કરેા. **बक**, **अक** માપેા. તેમની લંબાઈ **अब** સાથે સરખાવેા. ∠**बकअ** કેવડેા? (પુ૦) **अब**=૧", ∠**अबक**=૬૦° અને ∠**बअक**=૬૦° લઈને ત્રિકેાણ પુરેા કરેા. **बक**. **अक** માપેા. તેમની લંબાઈને **अब** જોડે સરખાવેા. ∠**बकअ** કેવડેા છે? આ ઉપરથી, જે ત્રિકેાણના બે ખુણા ૬૦, ૬૦ અંશના હેાય છે, તે વિષે તમને કયેા નિયમ મળી આવે છે? "તેનેા ત્રીજો ખુણેા ૬૦°નેા હેાય છે અને તેની બધી બાજુએા સરખી હેાય છે." સમબાજુ ત્રિકેાણને વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરેા. એમાંનેા દરેક ભાગ કાટખુણ ત્રિકેાણ છે, અને તેના બે સાંકડા ખુણા અનુક્રમે ૩૦° અને ૬૦°ના છે, એમ જણાઈ આવશે. આ ત્રિકેાણેામાં ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હેાય છે.

(૧) **बक**=૨", ∠**ब**=૯૦°, ∠**क**=૬૦°
(૨) **बक**=૪", ∠**ब**=૯૦°, ∠**क**=૬૦°
(૩) **बक**=૨·૫", ∠**ब**=૯૦°, ∠**क**=૬૦°

લઈને ત્રિકેાણ કરેા. **अक** કેટલા ઈંચ છે? **अक**ની સાથે **बक** સરખાવેા અને આ ઉપરથી કાટખુણ ત્રિકેાણના સાંકડા ખુણા ૬૦° અને ૩૦°ના હેાય, તેા ૯૦° અને ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુએા શા પ્રમાણમાં હેાય છે, એ વિષે જે નિયમ સમજાતેા હેાય તે કહેા.

"જો કાટખુણ ત્રિકેાણમાંનેા એક સાંકડેા ખુણેા ૩૦°નેા હેાય, તેા તે ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હેાય છે."

એકરૂપ ત્રિકોણોનાં બીજાં લક્ષણ.

૧", ૨", ૨.૨"ની બાજુઓ લઈને ત્રિકોણ કરો. એજ બાજુએ (એટલે એટલીજ લાંબી બાજુઓ) લઈને બીજો ત્રિકોણ કરે આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર, સરખી બાજુઓ એક બીજી પ પડે એવી રીતે મૂકી જુઓ. આ બે ત્રિકોણોમાં કોઈ પણ બાબતનું તફાવત કે અસમાનપણું છે કે? ગમે તેવડી બાજુઓ લઈને એ ત્રિકોણ કરો, તેજ બાજુઓ ગમે તે ક્રમે લઈને બીજો ત્રિકોણ કરે આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર એવી રીતે મૂકવાનો પ્રયત્ન કરો, તે નીચેના ત્રિકોણ પર બરાબર આવી રહે. એવી રીતે ત્રિકોણ મૂ શકાય છે કે? જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય એવા ત્રિકોણ સંબંધમાં ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમને કયો નિયમ મળી આવે છે?

"એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણન ત્રણ બાજુઓની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

જેમાં ∠**अबक** કાટખુણો હોય એવો એક ગમે તે **अब** કાટખુણ ત્રિકોણ લો. **डईफ** કાટખુણો દોરો. **ईफ**માંથી **बक** બરાબ **ईग** ભાગ કાપી કાઢો. **ग** મધ્યબિંદુ ધારીને **कअ** ત્રિજ્યાએ વર્તુ દોરો. ધારો કે તે **ईड**ને **ह** બિંદુમાં છેદે છે. **गह** સાંધો.

अबक અને **हईग** આ કાટખુણ ત્રિકોણોમાં રચના પ્રમાણે **अ** કર્ણ=**हग** કર્ણ, અને **बक** = **ईग** બાજુ છે.

∠**बअक**, ∠**ईहग** માપો અને તેમને સરખાવો. ∠**अक** ∠**हगई** માપો અને તેમને સરખાવો **अब**, **हई** માપો અને તેમ સરખાવો. સરખામણી પરથી શું જણાઈ આવે છે?

જેમનાં કર્ણ અને ફક્ત એકેક બાજુ સરખાં હોય, એવા કાટખુ ત્રિકોણોની જોડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ અનેક વાર કરો. આ ઉપર તમને કયો નિયમ જણાઈ આવે છે?

"જો એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજ બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની અનુક્

બરાબર હોય, તો બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

ત્રિકોણમાંના ખુણા અને બાજુઓના નાનામોટાપણાનો તેમની સામેની બાજુઓ અને ખુણાઓના નાનામોટાપણા સાથે સંબંધ.

વિષમ બાજુઓવાળો એક ત્રિકોણ દોરો. નાની બાજુની સામેનો ખુણો કાપી કાઢો. તેને મોટી બાજુની સામેના ખુણા પર મૂકી જુઓ, અને બેને સરખાવો. તમને કયો ખુણો મોટો જણાય છે? “ મોટી બાજુની સામેનો. ” બીજો વિષમબાજુ ત્રિકોણ કરો. તેની નાની બાજુની સામેનો ખુણો કોણમાપકથી માપો. પછી મોટી બાજુની સામેનો ખુણો કોણમાપકથી માપો. તમને શું જણાય છે? (પુ૦). ત્રિકોણની નાની મોટી બાજુઓની સામેના ખુણા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ ઉપલા પ્રયોગ પરથી જણાઈ આવે છે?

“ ત્રિકોણની બે નાની મોટી બાજુઓમાંથી જે મોટી હોય છે, તેની સામેનો ખુણો નાની બાજુની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે. ”

अब ગમે તેટલી લાંબી લો. **अबक** ગમે તેવડો સાંકડો ખુણો લો. ∠**अबक**થી મોટો ∠**बअक** લો. **अक, बक** માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની? **अब** ગમે તેટલી લાંબી લો. **अबक** ખુણો ગમે તેવડો લો. ∠**बअक**, ∠**अबक**થી નાનો લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. **अक, बक** માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની? આ ઉપરથી તમને કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે?

“ ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા ખુણાથી મોટો હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ નાના ખુણાની સામેની બાજુથી મોટી હોય છે. ”

	પહોળખુણુ ત્રિકોણ.	સાંકડખુણુ ત્રિકોણ.	કાટખુણુ ત્રિકોણ.
સમબાજુ ત્રિકોણ.			
સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુ			
વિષમબાજુ ત્રિકોણુ			

ઉપર ત્રિકોણના જુદા જુદા પ્રકાર એક નીચે એક આપ્યા છે, અને તેમની આગળ ખાનાં પાડીને, તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવનારાં છે તે, તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખ્યું છે. મથાળે જણાવેલા ધર્મ જે ત્રિકોણને પુરેપુરા લાગુ પડતા હોય, તે ત્રિકોણોની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં 'હા' એમ લખો; અને તે ધર્મ જે ત્રિકોણને કદાચ લાગુ પડે એમ તમને લાગતું હોય, તેમની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં "હોઈ શકે" એમ લખો.

ત્રિકોણની એક બાજુનો, બીજી બાજુઓના સરવાળા તથા બાદબાકી સાથેનો સંબંધ.

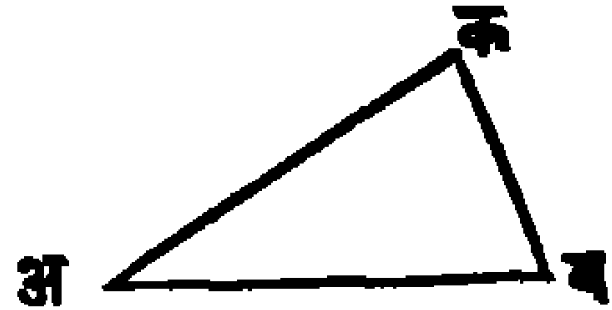
फ ड अ ब

એક **अब** લીટી લો. તેને **अ** તરફ **फ** સુધી લંબાવો. **अफ**માં **ड** બિંદુ લો. **अ** મધ્યબિંદુ અને **अड** ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. **ब** મધ્ય બિંદુ અને **बअ+अड** (=**बड**) કરતાં મોટી (દાખલા તરીકે **बफ**) ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે છે કે? "ના." શા માટે? "**बफ** ત્રિજ્યા **बअ+अड** કરતાં વધારે છે તેથી." આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે એમ કરવું હોય તો તેની ત્રિજ્યા કેવડી લેવી જોઈએ? "**बड** કરતાં નાની." (પુ૦). **बड** કરતાં નાની ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે વર્તુળ પહેલાને **ग** બિંદુમાં છેદે છે. હવે **ग** બિંદુ **अ** ને **ब** સાથે સાંધવાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તેમાં **अब** તો પાયોજ છે, અને **गअ**, **अड**

બરાબર છે, અને गब, अब+अडના સરવાળા કરતાં નાની છે. આ પરથી માલૂમ પડશે કે જો ત્રીજી લીટી अब+अडના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય, તોજ બે વર્તુળો એક બીજાને છેદી શકે છે, એટલે આપેલી બાજુઓવાળો ત્રિકોણ બની શકે છે. આ ઉપરથી, જેની બે બાજુઓના સરવાળા કરતાં ત્રીજી બાજુ મોટી હોય એવો ત્રિકોણ દોરી શકાય કે કેમ, એ વિષે શો નિયમ નીકળે છે?

अब=૩", बक=૨", અને कअ=૮" લઈને તમે ત્રિકોણ દોરી શકશો? अब=૩", बक=૨", અને कअ=૧" લઈને ત્રિકોણ દોરી શકશો કે? "ના." શા માટે નહિ? આકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્રિકોણ બની શકે એટલા માટે कअની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી લેવી જોઈએ?

પાસેની આકૃતિમાં अ અને ब બિંદુઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે? अથી ब સુધી अब સીધી લીટી દોરવાને બદલે अकब જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય, તો તેની લંબાઈ अबથી વધારે થશે કે ઓછી? "વધારે; કારણ કે अकब વાંકી છે." ब અને



क વચ્ચેનું અંતર માપો. એ બે બિંદુઓ વચ્ચે बअक જેવી લીટી દોરી હોય, તો તે बकથી નાની થશે કે મોટી? "મોટી; કારણ કે बक સીધી લીટી છે, અને बअक વાંકી લીટી છે." એજ પ્રમાણે क અને अ વચ્ચે અંતર કેટલું છે? कથી अ સુધી कअ સીધી લીટી ન દોરતાં कबअ જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય તો તેની લંબાઈ कअથી વધારે થશે કે ઓછી? "વધારે; કારણ કે कबअ વાંકી લીટી છે." ત્રિકોણની કોઈ પણ એક બાજુ અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ બેમાં કોની લંબાઈ વધારે હોય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુનો સરવાળો અને ત્રીજી બાજુ એમની વચ્ચે શો સંબંધ જણાય છે.

"ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે હોય છે."

ત્રિકોણની એક બાજુ ૪" અને બીજી ૨" હોય તો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી હોવી જોઈએ? "બે ઇંચ કરતાં વધારે." શા માટે? "કેમકે બે ઇંચ કરતાં વધારે ન લઈએ, એટલે દાખલા તરીકે ૧॥ ઇંચ લઈએ, તો બે લીટીઓનો સરવાળો ૨+૧॥=૩॥ એ ત્રીજી ૪ ઇંચ લાંબી લીટી કરતાં વધતો નથી." (પુ૦). આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે કે ઓછી, એ વિષે શું સમજાય છે? "ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં ઓછી હોય છે."

ત્રિકોણોનું નાનામોટાપણું.

∠**अबक** ગમે તેવડો લો. **अब** જેટલી **डई** બાજુ લો. **ई** બિંદુ પાસે ∠**डईफ**, ∠**अबक**થી નાનો કરો. **ईफ**, **बक**ની બરાબર કરો. **डफ** અને **अक** સાંધો. **अक**, **डफ** કરતાં નાની છે કે મોટી? ∠**अबक** ગમે તેવડો દોરો. **अब** જેવડી **डई** લીટી લો. **ई** બિંદુ આગળ ∠**डईफ**, ∠**अबक**થી મોટો કરો. **ईफ**, **बक**ની બરાબર કરો. **अक**, **डफ** સાંધો. **अक**, **डफ**થી નાની છે કે મોટી?

એક કાગળના કકડામાંથી બે નાના મોટા ખુણા કાપી કાઢો. બે નાની મોટી સળીઓ લો, અને તેવીજ એક બીજી જોડ લો. તેમાંથી એક જોડ લઈને તે (બે) સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના ખુણામાંના નાના ખુણા જેવડો ખુણો થાય. બીજી જોડ લો, અને તે બે સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના મોટા ખુણા જેવડો ખુણો થાય. કયું અંતર વધારે મોટું છે? પહેલી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું, કે બીજી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું? ઉપર વર્ણવેલા પ્રયોગ પરથી તમને શું સમજાય છે?

"જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાની બે બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો બીજાની બે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણાથી

મોટો હોય, તો પહેલાનો પાયો બીજાના પાયાથી મોટો હોય છે."

ગમે તે લંબાઈની अब, बक લીટીઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. डई, ईफ લીટીઓ અનુક્રમે अब, बक જેવડી લઈને ગમે તેવો એક બીજો ત્રિકોણ કરો. अक, डफમાંથી કઈ બાજુ મોટી છે? ∠ अबक, ∠ डईफ માપો. કયો ખુણો મોટો છે? अक, डफના નાનામોટાપણા સાથે ∠ अबक, ∠ डईफના નાનામોટાપણાનો કંઇ પણ સંબંધ છે? "હા." (પુ.). ગમે તેટલી લાંબી બે સળી લો. તેટલીજ લાંબી બીજી બે સળી લો. બે નાની મોટી સળી લો. તેમાંથી નાની સળી અને સળીઓની પહેલી જોડનો એક ત્રિકોણ કરો. મોટી સળી અને સળીઓની બીજી જોડનો બીજો એક ત્રિકોણ કરો. બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુ બીજાની બે બાજુઓની બરાબર છે, પણ એકનો પાયો બીજાના પાયાથી મોટો છે. આ પાયાની સામેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણા માપો. કયો ખુણો મોટો છે? આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે?

"જો બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુઓ બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાનો પાયો બીજાના પાયાથી મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો છે તેના પાયાની સામેનો ખુણો, નાના પાયાવાળા બીજા ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે."

ત્રિકોણના બીજા કેટલાક ધર્મ.

એક કાગળના કકડામાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાપી કાઢો. તેને (મધ્ય ભાગમાં) વાળીને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ કરો. લંબથી પાયાના જે બે ભાગ થાય છે તેમને સરખાવો. (પુ૦). શું જણાય છે? **"સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દોર્યો હોય, તો પાયાના બે સરખા ભાગ થાય છે."**

એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ લો. તેનો પાયો વાળીને દુભાગો. ત્રિકોણને વાળીને પાયાના મધ્યબિંદુથી શિરોબિંદુ સુધી લીટી

(અલબત સ્થળરૂપે) દોરો. આ લીટીના પાયાની સાથે જે બે ખુણા થાય છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો, અને શું જણાય છે તે જુઓ. (પુ૦). "સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી પાયાની સાથે જે બે ખુણા કરે છે, તે કાટખુણા હોય છે અને (અલબત) સરખા હોય છે."

એજ નિયમ સમબાજુ ત્રિકોણને લાગુ પડે છે કે? "પડે છે."

એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓને દુભાગો, અને ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ (એટલે મધ્યગા*) દોરો. (પુ૦). આ લીટીઓનાં છેદનબિંદુઓ વિષે શી ખાસ બાબત જણાય આવે છે? "**ત્રિકોણની બધી મધ્યગાઓ એક બીજીને એકજ બિંદુમાં છેદે છે.**

આ લીટીઓ એક બીજીને છેદીને તેમના જે બબ્બે ભાગ કરે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. (પુ૦). તમને શું દેખાય છે?

"**મધ્યગાનો ઉપલો ભાગ પાયા તરફના ભાગથી બમણો હોય છે.**"

ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓને દુભાગો, ને તેમનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી, દુભાગેલી લીટીઓના શિરોબિંદુ તરફના ભાગો સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમને પાયા આગળના ખુણાઓની સાથે સરખાવો. તેમજ આ લીટીની લંબાઈને પાયા સાથે સરખાવો. (પુ૦). આ ઉપરથી તમને પાયો અને આ લીટી એમની વચ્ચે શો સંબંધ જણાય છે? "**ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે અને તેનાથી અર્ધી હોય છે.**"

ગડી વાળીને ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓ ગડી વાળીને સાંધો. આ ગડીઓને લીધે ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ

---

* ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી ત્રિકોણની મધ્યગા કહેવાય છે.

થાય છે, તેમને કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા પર મૂકીને સરખાવો. (પુ૦). તમને શું જણાય છે? "તે બધા એકરૂપ છે."

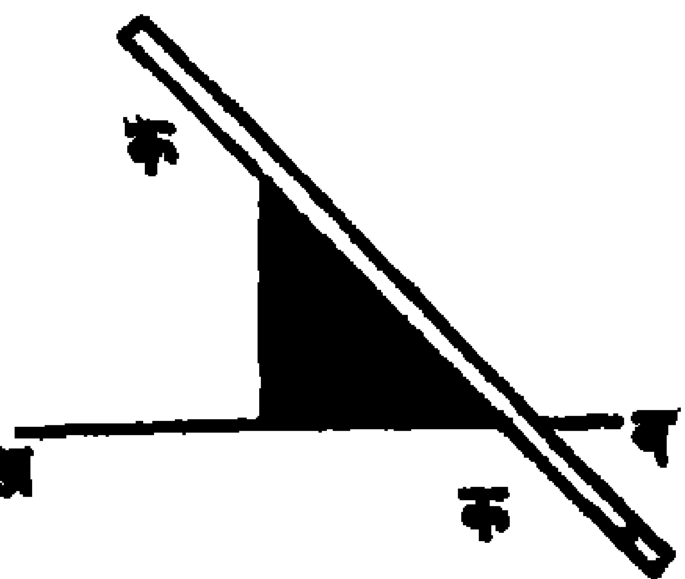
ત્રિકોણની એક બાજુને એવી રીતે વાળો, કે તેના બે છેડા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે. વાળવાથી પડેલો સળ તે બાજુને કાટખુણે દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુને વાળો અને પછી ત્રીજી બાજુને વાળો. આ બધા સળો એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. તેઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે કે? "હા." (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે? ત્રિકોણની બે બાજુઓ પર તેમનાં મધ્યબિંદુઓ-માંથી બે લંબ દોરો. તે જ્યાં મળે છે ત્યાંથી ત્રીજી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી લીટી દોરો. આ લીટી ત્રીજી બાજુની સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? આ પરથી કયો નિયમ નીકળે છે?

"ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે."

ત્રિકોણના ખુણા ગડી વાળીને દુભાગો. ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે કંઈ ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. "તે બધી એકજ બિંદુમાં મળે છે."

લંબ.

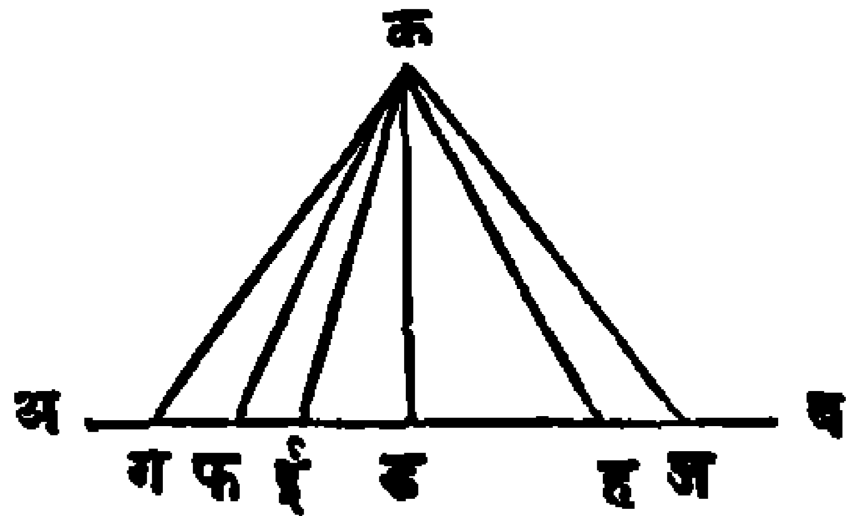
આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ દોરવાની રીતઃ—



ધારો કે **अब** આપેલી લીટી છે, અને **क** આપેલું બિંદુ છે. ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ **अब**ને લગાડીને માપ **अब**ની ઉપર કે નીચે રાખો. પછી માપના કર્ણને (એટલે કાટખુણાની સામેની બાજુને) લગાડીને ફુટપટી મૂકો.

પછી ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ આપેલા બિંદુને બરાબર અડકી રહે ત્યાંસુધી માપને પટીની બાજુએ ને બાજુએ (જરૂર પ્રમાણે ઉપર કે નીચે) ખસેડો, અને આપેલા બિંદુમાંથી માપની બાજુની લગોલગ લીટી દોરો.

અબ લીટી પર **डक** લંબ દોરો. પછી **क** બિંદુમાંથી **कई**,**कफ**, **कग**, ગમે તે બીજી લીટીઓ **अब**ને મળે એમ દોરો. **कड**ની લંબાઈ માપો. પછી **कई**, **कफ**, **कग**ની લંબાઈ માપો. આ લીટીઓમાં સૌથી નાની લીટી કઈ? "લંબ"



क બિંદુમાંથી **अब** સુધી લંબથી નાની લીટી દોરી શકાશે કે? "ના."

આ ઉપરથી, કોઈ એક બિંદુમાંથી એક લીટી સુધી જેટલી લીટીઓ દોરી શકાય, તેમાં સૌથી નાની લીટી કઈ, એ વિષે શો નિયમ સમજાય છે? **"લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે."**

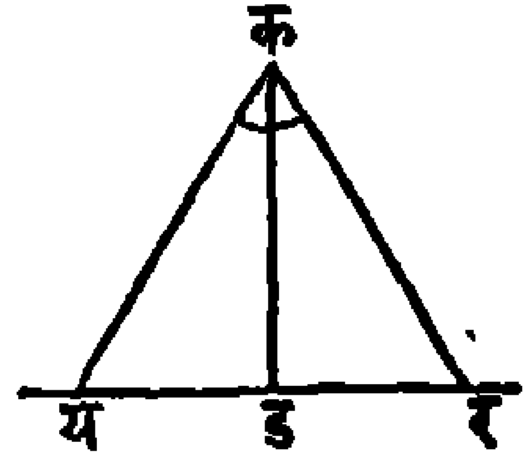
डकई અને **डकफ** ખુણા પૈકી મોટો ખુણો કયો? **कई** અને **कफ** આ લીટીઓમાં મોટી લીટી કઈ? તેમજ **डकह** અને **डकज** એ ખુણાઓમાં મોટો ખુણો કયો? **कह**, **कज**માં મોટી લીટી કઈ? **क**માંથી **अब** લીટીને મળનારી જે લીટીઓ દોરી છે, તે લીટીઓ **कड** લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાં **डकई** ખુણા કરતાં **डकफ** ખુણો મોટો છે, અને **डकफ** કરતાં **डकग** મોટો છે, અને **कई**થી **कफ** લીટી મોટી છે, અને **कफ**થી **कग** મોટી છે. આ ઉપરથી કોઈ એક બિંદુમાંથી કોઈ લીટી સુધી દોરેલી લીટીઓ તેજ બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે ખુણાઓનો તે લીટીઓની લંબાઈની સાથે શો સંબંધ જણાય છે?

"આ ખુણો જેમ મોટો તેમ તે લીટી લાંબી હોય છે."

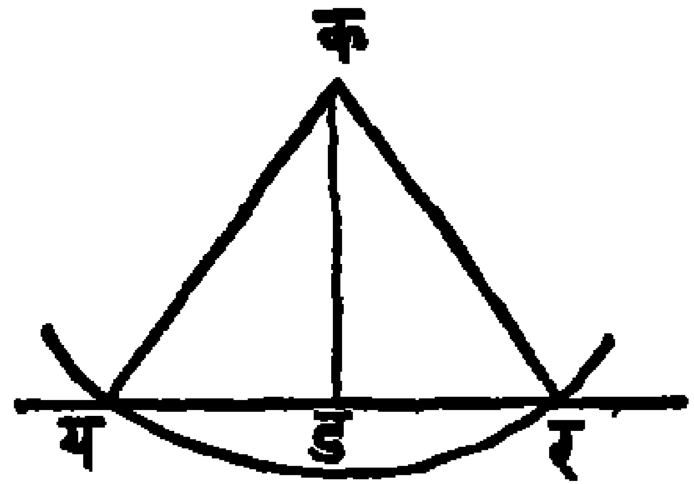
ઉપલી આકૃતિમાં ∠**कईड**, ∠**कफड**, ∠**कगड**, એ ખુણાનું નાનામોટાપણું અને **कई**, **कफ**, **कग** લીટીઓનું નાનુમોટાપણું, એ

એ વચ્ચે તમને કંઈ સંબંધ જણાઈ આવે છે? "**લંબ તરફનો ખુણો જેમ નાનો તેમ ખુણો કરનારી લીટી લાંબી હોય છે.**"*

યર લીટી પર દોરેલા **कड** લંબની સાથે ગમે તે **डकय** ખુણો કરો. ∠**डकय** બરાબર ∠**डकर** કરો. **कय** અને **कर** માપો. તેમને સરખાવો. આ ઉપરથી લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓના સંબંધમાં તમને શું જણાઈ આવે છે? "**લંબની જોડે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે.**"



એક આડી લીટીમાં ગમે ત્યાં **र** બિંદુ લો. તેના પરના લંબમાંના **क** બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને **कर** ત્રિજ્યાએ, આડી લીટીને **य** બિંદુમાં છેદે એવો **रय** કાંસ દોરો. **कय**, **कर** સાંધો. ∠**डकय**, ∠**डकर**ને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે?



ઉપલા પ્રયોગ પરથી, કોઈ લીટી પર દોરેલા લંબના કોઈ એક બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી સરખી લીટીઓ દોરી હોય, તો તેઓ લંબ સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમના સંબંધમાં શો નિયમ જણાય છે? "**આપેલી લીટી સુધી તેના પરના લંબમાંના કોઈ બિંદુમાંથી દોરેલી સરખી લીટીઓ લંબની જોડે સરખા ખુણા કરે છે.**"

એક **अब** લીટી દોરો. તેની બહાર **क** બિંદુ લો. **क** બિંદુથી **अब** કેટલે અંતરે છે? **क**માંથી **अब** સુધી ગમે તેટલી લીટીઓ દોરી શકાશે, અને કદાચ એમ ધારવામાં આવશે કે તે બધી લીટીઓ

---

*તેમ છતાં પણ ઉપલા બે પ્રયોગ પરથી એમ સિદ્ધ થતું નથી કે ખુણાના પ્રમાણમાંજ લીટીની લંબાઈ હોય છે, એટલે ખુણો દોઢગણો મોટો હોય તો લીટી દોઢગણી મોટી કે નાની હોય.

क અને **अब** વચ્ચેનું અંતર દર્શાવી શકશે. પરંતુ કોઈ પણ બે ર
વચ્ચેનું અંતર પૂછયું હોય, તો જે અંતર ઓછામાં ઓછું
તે આપણે કહીએ છીએ; માટે **क**થી **अब** સુધીનું અંતર તે
અને **अब** વચ્ચેનું ઓછામાં ઓછું અંતર છે. આ અંતર કયું
તે આગળ આવી ગએલા પ્રયોગ ઉપરથી આપણાથી કહી શકાશે
"આ અંતર **क**માંથી **अब** પર દોરેલો લંબ છે." **क**માંથી :
ઉપર લંબ દોરો. આ લંબ કરતાં નાની લીટી **क**માંથી **अब** (
દોરી શકાશે કે? "ના." આ પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ
આપેલું બિંદુ અને આપેલી લીટી એ બે વચ્ચેનું અંતર તે બિંદુમ
તે લીટી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ છે.

પ્રશ્ન.

(૧) **अब**=૧·૨" લો. **ब** છેડા સાથે કાટખુણો કરનારી લીટી દે

(૨) **अब, कड** લીટીઓ દોરો, અને **ब**માંથી **कड** પર લંબ દે

(૩) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ દોરો. તેના એક શિરોબિંદુમ
સામી બાજુ પર લંબ દોરો.

(૪) ગમે તેવો એક ખુણો કરો. તેને ગડી વાળીને દુભ
દુભાગનારી લીટી (સળ) પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ લો. આ બિંદુમ
ખુણાના ભુજો પર લંબ દોરો. તે માપો અને તેમને સરખાવો. ત
શું દેખાય છે? "તે સરખા છે."

(૫) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેની બાજુઓ દુભ
દુભાગનારાં બિંદુઓમાંથી લંબો દોરો. તેમને એક બીજાને મ
સુધી લંબાવો. તેઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે એ વિષે તમને
વિશેષ બાબત જણાઈ આવે છે? (પુ૦). **"તે બધા એકજ બિં
મળે છે."**

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમને છેદનારી એક લીટી
તેને સમાંતર બીજી લીટી દોરો. આ ચાર લીટીઓથી બનેલી આકૃ

સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે, માટે તેને **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

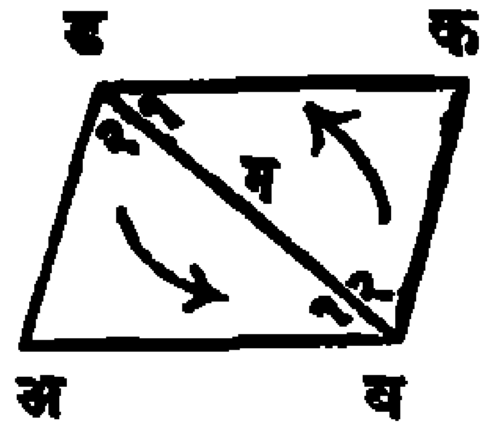
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેવા દેખાતા કેટલાક પદાર્થનાં નામ કહો. અટકળથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેની બાજુઓ સમાંતર છે કે નહિ તે જુઓ.

વ્યાખ્યા:—જે ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સમાંતર હોય છે તેને **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

જુદા જુદા પ્રકારના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેમની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. તેમના કર્ણો દોરો, અને કર્ણોએ એક બીજાના કરેલા ભાગ માપો, અને તેમને સરખાવો. (પુ૦). આ પરથી તમને કોઈ સામાન્ય નિયમ સમજાય છે? "**સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.**" સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણથી થએલા બે ત્રિકોણરૂપ ભાગ એક બીજા પર મૂકી જુઓ. (પુ૦). શું જણાઈ આવે છે? 'તેઓ એકરૂપ છે."

(નીચેનો પ્રયોગ પ્રત્યક્ષ કરવો.)

अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. **बड** કર્ણ છે. **डब**નું મધ્યબિંદુ **म** છે, એમ ધારો.



∠**अबड**=∠**बडक**; ∠**अडब**=∠**कबड**; } કારણ કે તે સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે.

હવે **अबकड** ચતુષ્કોણની નકલ **अबकड** ચતુષ્કોણ પર મૂકીને **म** બિંદુની આસપાસ અર્ધા વર્તુળ જેટલી ફેરવીને મૂકી હોય તો **मब**,**मड** બરાબર છે તેથી **ब**, **ड** પર પડશે. જ્યારે **ब**,**ड** પર પડે છે ત્યારે ∠**अबड**, ∠**बडक**ની બરાબર હોવાથી **बअ**, **डक** પર પડશે. તેમજ **डम**=**मब**, માટે **ड**, **ब** પર પડશે; અને ∠**अडब**= ∠**कबड** છે, માટે **डअ**, **बक** ઉપર પડશે.

હવે **बअ,डक** પર પડશે, અને **डअ, बफ** પર પડશે, માટે **अ,क** પર બરાબર આવી રહેશે.

એજ પ્રમાણે બતાવી શકાશે કે **डक, बअ** ઉપર પડે છે; **कब, अड** પર પડે છે; અને અલબત **क,अ** પર પડે છે.

આ ઉપરથી આપણે જોઈએ છીએ કે **बअ, डक**ની બરાબર છે; **अड, बक**ની બરાબર છે; **अम, मक**ની બરાબર છે; સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર છે; અને કર્ણથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે.

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કયા ધર્મ જણાઈ આવે છે?

"સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

(૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે,

(૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;

(૩) દરેક કર્ણથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે; અને

(૪) બંને કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર.

એક બીજી સાથે મધ્યભાગે કાટખુણો કરનારી બે સરખી લીટીઓ દોરો. તેમના છેડામાંથી પહેલી બે લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ દોરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો. આ ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ અને ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. શું જણાય છે? "બધી બાજુ સરખી છે, અને બધા ખુણા કાટખુણા છે." એવી આકૃતિને **ચોરસ** કહે છે.

કાગળના બે સરખા ચોરસ કાપી કાઢો. તે પૈકી એક ચોરસ બીજા પર જુદી જુદી રીતે મુકીને ચોરસના ખુણા અને બાજુઓ સરખાવો. શું જણાય છે?

એક બીજી સાથે કાટખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે તેને **લંબચોરસ** કહે છે.

એક બીજી તિર્યક્ (સાંકડો કે પહોળો) ખુણો કરનારી બે સરખી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ થાય છે, તેને **સમબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક (સાંકડો કે પહોળો) ખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય તો જે આકૃતિ બને છે, તેને **સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ** કહે છે. [સમપ્રતિભુજ=સમ એટલે સરખી (છે) પ્રતિ એટલે સામસામી, ભુજ એટલે બાજુઓ (જેની તે).]

ઉપર ચોરસ વિષે જે પ્રયોગ કર્યા છે, તે લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એ બધાના સંબંધમાં કરો; અને તેમની બાજુઓ અને ખુણાઓ વિષે કયો નિયમ નીકળે છે તે જુઓ.

"લંબચોરસની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે, અને સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે.

"સમબાજુ ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુ સરખી હોય છે, અને ફક્ત સામસામા ખુણા સરખા હોય છે."

"સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે."

નીચે આપેલી લંબાઈવાળી લીટીઓ લઈને તેમના પર ચોરસો દોરોઃ—

૧"; ૧.૨", ૧.૪", ૯ મિ.મી; ૧.૨ સે.મી.; ૧.૫ સે.મી;૨.૨સે.મી.

નીચે આપેલી લંબાઈ પહોળાઈના લંબચોરસ દોરોઃ—

૨", ૧", ૧.૨", ૧"; ૧.૪", .૮"; ૩"; ૨"; ૨.૨", ૧.૨"; ૩.૫", ૧.૪".

નીચે આપ્યા પ્રમાણે એક બાજુ અને ખુણો લઈને સમબાજુ ચતુષ્કોણ દોરોઃ—

અબ=૧", ∠**ङअब**=૪૫°; **अब**=૧·૩", ∠**ङअब**=૭૫°; **अब**=૧·૫", ∠**ङअब**=૧૨૦°.

નીચે આપેલી બાજુઓ અને ખુણા લઈને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ દોરો:—

अब	**ङअ**	∠**ङअब**
૨"	૧·૫"	૩૦°
૧·૨"	૧"	૧૨૦°
૨"	૨·૨"	૧૦૦°
૧·૭"	૧·૭"	૪૮°

ચોરસ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એમના બંને કર્ણ દોરો; અને કર્ણોના ભાગો અને તેમની વચ્ચેના ખુણા સરખાવો. (પુ૦). શું જણાઈ આવે છે? **ચોરસના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે; લંબચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, અને તે તિર્યક્ (સાંકડા કે પહોળા) ખુણે એક બીજાને દુભાગે છે (એટલે તે એક બીજા પર લંબ હોતા નથી). સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે. સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને તિર્યક ખુણે દુભાગે છે."**

વ્યાખ્યા:—

જે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને **ચોરસ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે અને પાસપાસેની બાજુઓ નાની મોટી હોય છે, તેને **લંબચોરસ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (બે સાંકડા અને બે પહોળા) હોય છે તેને **સમબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (બે સાંકડા અને બે પહોળા) હોય છે તેને **સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને **કાટખુણ ચોખુણ** કહે છે.

જેની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી એવો એક ચતુષ્કોણ દોરો. તેની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. (પુ૦). એવા ચતુષ્કોણની સામસામી કે પાસપાસેની બાજુઓ અને ખુણા હંમેશજ સરખા હોય છે કે ? એવા ચતુષ્કોણને **વિષમબાજુ ચોખુણ** કહે છે; કારણ કે તેની બાજુઓ વિષમ એટલે નાની મોટી હોય છે.

ચોખુણની ફક્ત બેજ બાજુ સમાંતર હોય તો તેને **સમલંબ ચોખુણ** કહે છે.

ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની શરૂઆતમાં કહેલા ચોખુણ કે ચતુષ્કોણના નિયમિત પ્રકાર સિવાય જેમના ધર્મ નિયમિત હોય એવો ચોખુણનો હવે કોઈ બીજો પ્રકાર પડી શકે એમ છે કે ?

એક વિષમબાજુ ચોખુણ અને એક સમલંબ ચોખુણ હાથે દોરો.

ચોરસ અને લંબચોરસના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે, માટે આ આકૃતિઓ કાટખુણ ચોખુણ કહેવાય છે.

બધા કાટખુણ ચોખુણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?
"તેમના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના બંને કર્ણ સરખા હોય છે."

ચોરસ અને સમબાજુ ચોખુણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?
"તેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને તેમના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે." તેઓ કઈ બાબતમાં જુદા પડે છે ? "........"

બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?
"તેમની સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે."

લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં એક બીજાને મળતા આવે છે ? કઈ બાબતમાં તેઓ જુદા પડે છે ?

ચતુષ્કોણોના જુદા જુદા પ્રકાર નીચે અનુક્રમે આપ્યા છે, અને તેમની સામે ખાનાં પાડેલાં છે. તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવે છે તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખેલું છે. તો મથાળે આપેલા ધર્મ જે જે ચતુષ્કોણમાં હોય તેમની સામે તે ધર્મ દર્શાવનારાં ખાનાંમાં ' હા ' એમ લખો.

	સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા છે?	કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે ?	બધા ખુણા કાટખુણા છે ?	કર્ણો સરખા છે ?	કર્ણો એક બીજા પર લંબ છે ?	પાસપાસેની બાજુઓ સરખી છે ?
સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ						
સમબાજુ ચતુષ્કોણ						
લંબચોરસ						
ચોરસ						
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ						

એવા ચોખુણ દોરો કે જેમની

(૧) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૩) સામસામી બે બાજુઓ સરખી અને
સમાંતર હોય, અથવા

(૪) જેમના કર્ણ એક બીજાને દુભાગતા હોય; અને તેમની સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે કે કેમ તે જુઓ. (૫૦)

આ ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

"ચોખુણમાં જો—

(૧) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી દરેક જોડમાંની બાજુઓ સરખી હોય; અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય; અથવા

(૩) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી એક જોડમાંની બે બાજુઓ સરખી અને સમાંતર હોય; અથવા

(૪) કર્ણો એક બીજાને દુભાગતા હોય, તો તે ચોખુણ સમાંતરબાજુ છે."

પ્રશ્ન

નીચેનાં માપ ઉપરથી કહેલી આકૃતિઓ બનાવો:—

(૧) જેની બાજુઓ ૪" અને ૫" હોય એવો કાટખુણ ચોખુણ.
,, ,, ૩" અને ૨½" ,, ,, ,, ,,
,, ,, ૩.૨" અને ૫" ,, ,, ,, ,,
,, ,, ૧.૫" અને ૨" ,, ,, ,, ,,

(૨) જેની બાજુઓ ૩" અને ૪" હોય અને જેની બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો ૪૦° હોય એવો સમાંતરબાજુ ચોખુણ.

જેની બાજુઓ ૧" અને ૫" ને વચ્ચેનો ખુણો ૬૦° હોય એવો.
,, ૨" અને ૩" ,, ૮૦° ,,
,, ૫" અને ૪" ,, ૧૨૦° ,,
,, ૨" અને ૪" ,, ૧૫૦° ,,

(૩) નીચેનાં માપ ઉપરથી ચોખુણ કરો:—

अब=૬·૩ સે.મી., **ब**=૮૨°, **बक**=૮·૨ સે.મી., **क**=૯૦°, **कड**=૭·૭ સે.મી.

अब=૩·૪", **बक**=૨·૨", **अड**=૨·૯", **अ**=૬૮°, **ब**=૮૬°.

ब=૧૧૬°, **बक**=૧·૪", **क**=૯૯°, **कड**=૧·૯", **ड**=૯૨°.

अ=૬૭°, **ब**=૧૧૩°, **क**=૪૬°, **अब**=૫·૩", **अड**=૮·૬".

ब=૧૨૨°, **क**=૧૩૦°, **ड**=૪૫°, **बक**=**कड**=૧·૬".

अड=૩", **ड**=૧૧૮°, **डअक**=૨૭°, **बअक**=૩૫°, **अब**=૨·૪".

अक=૫·૬", **बअक**=૫૮°, **डअक**=૫૯°, **बकअ**=૫૮°, **डकअ**=૬૯°.

अब=૧·૮", **बड**=૧·૭", **कड**=૨", **अबड**=૧૧૮°, **बडक**=૨૩°.

अब=**कड**=૫·૮ સે.મી; **अड**=૪·૭સે.મી; **अ**=૭૨°, **बडक**=૪૬°.

પ્રકરણ ૨.

ભૂમિતિમાંની કેટલીક મૂળ કલ્પનાઓ અને વ્યાખ્યાઓ.

[**સૂચના :**—આની પહેલાંનો સર્વ ભાગ જેમને ચાલી ગયો હોય એવા વિદ્યાર્થીઓ માટેજ આ ભાગ છે. આ પહેલે ફેરે ન લેતાં પહેલા ખડના પુનરાવર્તન વખતેજ લેવો.]

ભૂમિતિ એટલે શું ?

એક ખેતરથી બીજું ખેતર કેટલું મોટું છે, તે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ જોઈને આપણે કહી શકીએ છીએ. એજ રીતે એક લાકડાના ઘન કરતાં બીજો ઘન કેટલો મોટો છે, એ તેમની લંબાઈ પહોળાઈ, અને જાડાઈ જોઈને કહીએ છીએ. પરંતુ આ કામ માટે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ પરથી પદાર્થોનું કદ નક્કી કરવાના

નિયમો બાંધવામાં આવ્યા છે, તે જાણવાની જરૂર છે. પદાર્થોની બાજુઓના અને ખુણાઓન જે ધર્મો ઉપર આ નિયમો નક્કી થાય છે, તે ધર્મોનું વિવેચન જે શાસ્ત્રમાં કર્યું છે, તેને **ભૂમિતિ** કહે છે.

જમીન કેમ માપવી એનેા વિચાર કરતાં, પદાર્થોની લંબાઈ, પહોળાઈ, અને ખુણા પરથી તેમનું પરિમાણ નક્કી કરવાના કેટલાક નિયમો લોકોના જાણવામાં આવ્યા; તેથી આ નિયમોના શાસ્ત્રનું ભૂમિતિ એ નામ પાડયું. [ભૂ=પૃથ્વી, જમીન; મિતિ=માપવું (નામ).]

પદાર્થ.

[નીચેના વિવેચનમાં ‘ પદાર્થ ’ શબ્દનો અર્થ જેને રૂપ કે આકાર હોય એવી કોઈ પણ વસ્તુ, એમ સમજવો.]

પદાર્થો જગા રોકે છે, તેથી તેઓ જેટલી અને જે પ્રકારની જગા રોકે છે, તેટલો અને તેવો તેમનો આકાર હોય છે. પેટી ચોખંડી જગા રોકે છે માટે તેનો આકાર ચોખંડો હોય છે. જ્યારે કાદવનો ગોળો ગોળ જગા રોકે છે, ત્યારે તેનો આકાર ગોળ થાય છે. જો તેજ કાદવનો ગોળો કોઈ ચોખંડી પેટીને ભરી કાઢે, તો તે ચોખંડી પેટીમાંની જગા રોકશે, અને તેથી તેનો આકાર ચોખંડો થશે. પાણી ગાગરમાંની જગા રોકે છે, ત્યારે તે ગાગરનો આકાર ધારણ કરે છે; પણ તે એક સીસીમાં ભર્યું હોય તો તે સીસીનો આકાર ધારણ કરશે.

બધા પદાર્થો વિષે આપણને નીચેનો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે:—બધા પદાર્થોને કોઈ પણ આકાર હોય છે, અને તેઓ કોઈ પણ જગા રોકે છે.

• કેટલાક પદાર્થ (પાટીઆના કકડા વગેરે) એવા લો, કે જેમની પહોળાઈ અને જાડાઈ સરખી હોય, પણ લંબાઈ ઓછીવત્તી હોય; કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને જાડાઈ સરખી હોય, પણ પહોળાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ સરખી હોય, પણ જાડાઈ ઓછીવત્તા હોય;

અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને, અથવા અમુક પદાર્થ કેટલો મોટો છે, તે તેની બાજુઓની મદદથી તેમની પાસે કહેવડાવીને નીચેનો સામાન્ય નિયમ કાઢવો:—

સર્વ પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ હોય છે. લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ, એ પરિમેયો સર્વ પદાર્થોને હોય છે; માટે સર્વ પદાર્થોને ત્રિપરિમેયાત્મક (એટલે ત્રણ પરિમેયોવાળા) કહે છે.

કેટલાક પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ–આ પરિમેયો પૈકી એક અથવા વધારે પરિમેયો સૂક્ષ્મ હોય છે, પરંતુ તે બીલકુલ હોતાં નથી એમ કદી પણ બનતું નથી.

લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ.

કોઈ પણ પદાર્થ જે બાજુએ વધતો જતો દેખાય છે, તે બાજુને તે પદાર્થની **લંબાઈ;** લંબાઈની સપાટીમાં હોઈને લંબાઈની સાથે કાટખુણો કરનારી આડી બાજુને તેની **પહોળાઈ;** અને આ બંનેની જોડે કાટખુણો કરનારી (અથવા બંને પર ઉભી આવેલી) બાજુને તેની **જાડાઈ** કહેવાનો સામાન્ય રિવાજ છે. પરંતુ કોઈ કોઈ વખતે પદાર્થની સૌથી મોટી બાજુને લંબાઈ, તેનાંથી નાની બાજુને પહોળાઈ, અને સૌથી નાની બાજુને જાડાઈ, એમ પણ કહે છે. એમ છતાં એટલું ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ, કે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ એ કેવળ સાંકેતિક (અને સાપેક્ષ) શબ્દો છે; અને તે શબ્દો કોઈ પણ બાજુને લગાડ્યા હોય, તોપણ તે પરથી ગણિત કરવામાં ભૂલ થવાનો સંભવ નથી.

પૃષ્ઠ.

આ દડાને જુદી જુદી બાજુથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખોજ દેખાય છે કે? આ આંકણી (ગોળ આંકણી) તરફ જુદી જુદી બાજુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખોજ દેખાય છે કે? પૈસો સર્વ બાજુએથી જુઓ.

નેા આકાર બધી તરફથી સરખેાજ દેખાય છે કે? આ ઈંટ તરફ મે ગમે તે બાજુએથી જુએા તેાપણુ તે સરખીજ દેખાય છે કે? ે લંબાઈની બાજુએથી જોઈ હેાય તેા કેવી દેખાય છે? પહેાળાઈની ાજુએથી જોઈ હેાય તેા કેવી દેખાય છે? ઉપલી બાજુએથી કેવી દેખાય છે? દડેા બધી બાજુએથી સરખેા દેખાય છે, પણ ાંકણી, પૈસેા, ઈંટ, વગેરે પદાર્થો બધી તરફથી સરખા દેખાતા નથી. એનું કારણ શું? "તેમની બાજુએા જુદા પ્રકારની છે, એટલે તેમનાં પૃષ્ઠ જુદા પ્રકારનાં છે."

આ ઉપરથી પદાર્થોના સંબંધમાં વળી કર્યો ધર્મ સમજાય છે? 'તેમને* પૃષ્ઠેા હેાય છે."

દડાને કેટલાં પૃષ્ઠ હેાય છે? શંકુને કેટલાં? ગેાળાર્ધને કેટલાં? પૈસાને કેટલાં? પેટીને કેટલાં? "દડાને એક પૃષ્ઠ હેાય છે, શંકુને અને ગેાળાર્ધને બે પૃષ્ઠ હેાય છે, પૈસાને ત્રણુ પૃષ્ઠ હેાય છે, પેટીને છ પૃષ્ઠ હેાય છે." વાંકાચુંકા પત્થરને કેટલાં પૃષ્ઠ હેાય છે? "તેને અનેક પૃષ્ઠ હેાય છે."

દડાનું પૃષ્ઠ અને ઘનનું પૃષ્ઠ તપાસેા. તે બે વચ્ચે તમને શેા તફાવત જણાય છે? "દડાનું પૃષ્ઠ વક્ર છે, અને ઘનનું પૃષ્ઠ સપાટ છે."

પૃષ્ઠ બે પ્રકારનાં–સપાટ અને વક્ર.

જેનાં બધાં પૃષ્ઠેા સપાટ હેાય, એવા પદાર્થને ઓછામાં ઓછાં કેટલાં સપાટ પૃષ્ઠેા હેાય છે? "ચાર. દાખલા તરીકે, ત્રિકેાણાકાર મિનારેા કે શંકુ."

કેાઈ પણ પદાર્થનાં બે પૃષ્ઠેા જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? "કેાર" આ કેાર ભૂમિતિમાંથી કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે? "લીટી જેવી." બેથી વધારે પૃષ્ઠેા જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે.? "અણી." કેારેા મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે?

---

* બાજુ કરતાં પૃષ્ઠ શબ્દ વધારે સારેા છે. બાજુ શબ્દનેા કેાર એવેા પણુ અર્થ થાય છે; પરંતુ પૃષ્ઠ શબ્દનેા એકજ અર્થ થાય છે; તેથી પૃષ્ઠ શબ્દનેા ઉપયેાગ કર્યો હેાય તેા અર્થની બાબતમાં ગુંચવાડેા થશે નહિ.

"અણી." અણી, ભૂમિતિમાંની કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે? "બિંદુ જેવી."

બે પૃષ્ઠો ફક્ત એકજ લીટીમાં મળી શકે છે; તેથી '(પાસપાસેનાં) બે પૃષ્ઠોને એક બીજાથી ઓળખાવનારી આકૃતિને લીટી કહેવી.' એવી, લીટીની વ્યાખ્યા કોઈ વખતે આપવામાં આવે છે.

ત્રિકોણાકાર શકુને પૃષ્ઠ કેટલાં? કોરો કેટલી? ખુણા કેટલા? અણી કેટલી? બે પૃષ્ઠ મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? "કોર." કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? "અણી." ત્રિકોણાકાર શંકુનાં એકજ વખતે વધારેમાં વધારે કેટલાં પૃષ્ઠ દેખાય છે? (ઘન, શંકુ, ઈંટ...... વગેરેના સંબંધમાં એવાજ પ્રશ્નો પૂછવા.)

ઉપલા વિવેચન પરથી એમ સ્પષ્ટ માલમ પડશે કે પદાર્થોના છેડા પૃષ્ઠો હોય છે, પૃષ્ઠના છેડા (હદ) લીટીઓ હોય છે, અને લીટીના છેડા બિંદુઓ હોય છે.

પૃષ્ઠને લંબાઈ હોય છે કે? "હા." પહોળાઈ હોય છે કે? "હા." જાડાઈ હોય છે કે? "ના." (જાડાઈ હોય છે એવો ઉત્તર કોઈ આપે તો નીચેનો પ્રયોગ કરીને યોગ્ય જવાબ કઢાવવો.)

(૧) આ તપેલામાંના પાણીનો પૃષ્ઠભાગ જુઓ. આ પૃષ્ઠ તપેલાના અંદરના ભાગને અડકેલું છે કે? "હા." આ પૃષ્ઠ જ્યાં (તપેલાની બાજુને) અડકે છે તેની નીચે બધુ પાણીજ છે અને ઉપર બધી હવાજ છે; માટે આ પૃષ્ઠ પાણી અને હવાની વચ્ચે છે. જ્યાં પાણી પુરૂં થાય છે ત્યાં હવા શરૂ થાય છે; તો આ પૃષ્ઠને કંઈ જાડાઈ હોવાનો સંભવ છે?

(૨) એક સીસીમાં તેલ અને પાણી ભરવાં; અને જ્યાં પાણી પુરૂં થાય છે ત્યાં તેલ શરૂ થાય છે, એ વાત બતાવીને પૃષ્ઠને જાડાઈ નથી એ વાત સ્પષ્ટ કરવી.

એક લાકડાનું પાટીઉં ઘસાતાં ઘસાતાં એટલું ઘસાયું, કે તેને જાડાઈ નામની પણ બીલકુલ રહી નહિ; એવી આપણે કલ્પના કરીએ,

તો તેનો લંબાઈ પહોળાઈવાળો જે ભાગ રહ્યો તે પૃષ્ઠ છે; અર્થાત્ તેને જાડાઈ નથી.

જમીનનું ક્ષેત્રફળ કાઢતી વખતે તેની ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈનોજ વિચાર કરવો પડે છે; જાડાઈનો બીલકુલ વિચાર કરવો પડતો નથી. આ ઠેકાણે જમીનના સંબંધમાં જે વાત ધ્યાનમાં લેવી પડે છે, તેનેજ પૃષ્ઠ કહેવું.

છાયાને લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જાડાઈ હોતી નથી; માટે છાયા એ પૃષ્ઠનો એક ઘણોજ સારો દાખલો ગણી શકાય.

વસ્તુ અને આકાશ એ બે વચ્ચેની હદ એ તે વસ્તુનું પૃષ્ઠ છે.

પૃષ્ઠને પરિમેય કેટલાં? "બે." પૃષ્ઠના છેડા કઈ આકૃતિ જેવા દેખાય છે? "લીટી જેવા."

વર્તુળ, પરિધિ, વ્યાસ, કૌંસ, અને જ્યા, એમને પરિમેયો કેટલાં? પાતળા કાગળનો કકડો, છાયા, અને કાગળને લગાડેલા રંગનો થર, એ પૃષ્ઠો કહેવાય કે?

પૃષ્ઠની વ્યાખ્યાઃ—પૃષ્ઠને ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જાડાઈ બીલકુલ હોતી નથી.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ વચ્ચે શો તફાવત છે? બે સપાટ પૃષ્ઠ (દાખલા તરીકે, ઘનની કે ઈંટની બાજુ) એકમેકને લગાડો. પછી બે વક્ર પૃષ્ઠો (દડાની કે નળાકારની બાજુ) એકમેકને લગાડો. બે સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂકીને તેમને એક બીજા પર (ઘંટીના પડની માફક) જુદી જુદી દિશામાં ફેરવો. બે વક્ર પૃષ્ઠોને એક બીજા પર મૂકીને તેજ પ્રમાણે ફેરવો. આ બે બાબતોમાં શો ફરક જણાય છે? "સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય, તો તે એક બીજા સાથે બરાબર મળી જાય છે, તેમની વચ્ચે અંતર રહેતું નથી; અને વક્ર પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય તો તેમની વચ્ચે કેટલુંક અંતર રહે છે."

સપાટ પૃષ્ઠ પર ગમે ત્યાં બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દોરા વડે દર્શાવો. (બિંદુઓની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને તેમાંની એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) આ લીટી પૃષ્ઠમાં રહે છે કે પૃષ્ઠની બહાર રહે છે? વાંકા અને ઉંડા પૃષ્ઠ ઉપર બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દોરાથી દર્શાવો. (પહેલાંની માફક બિંદુની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) તે (આખી) લીટી પૃષ્ઠમાંજ રહે છે, કે પૃષ્ઠની બહાર રહે છે? વક્ર પૃષ્ઠમાં બે બિંદુઓ ગમે ત્યાં લીધાં હોય, તો તેમને સાંધનારી સીધી લીટી હંમેશાં તે પૃષ્ઠમાં રહે છે કે?

આ પરથી સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે? દડાના કે નળાકારના પૃષ્ઠ પર ગમે ત્યાં બિંદુ લીધાં હોય, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી સર્વ લીટીઓ સીધી હશે કે? "ના."

સપાટી.

કોઈ પૃષ્ઠ સીધું કે સપાટ હોય તો તે એક સપાટીમાં છે એમ કહેવાય છે.

કોઈ પૃષ્ઠ બધી દિશાઓમાં એકજ સીધી લીટીમાં વધાર્યું હોય, તો તે જે જગા રોકે છે, તે તે પૃષ્ઠની **સપાટી** છે.

ઓછીવત્તી લંબાઈની ત્રણ લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી. તેમના ઉપલા છેડા બિંદુઓ છે એમ ધારવાને છોકરાઓને કહેવું. તે લાકડીઓની (ટોચ) ઉપર મોટું પાટીઉં આડું મૂકવું, એટલે લાકડીઓના છેડાથી દર્શાવાતી બિંદુઓની સપાટી પાટીઆથી દર્શાવાશે. આ પ્રયોગ જુદી જુદી રીતે ત્રણ ચાર વખત કરવો.

સપાટીનું લક્ષણ એવું છે, કે તેમાં ગમે તે બે બિંદુ લઈને **તેમની વચ્ચે જો સીધી લીટી દોરી હોય, તો તે આખી લીટી તે સપાટીમાં રહે છે. (તે સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તે સપાટીની બહાર થઈને જાય તો તે સપાટીજ નથી.)**

સપાટી નક્કી કરવા માટે ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જોઈએ ? "ત્રણ."

ચોપડીની ૭ બાજુમાંથી કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ? દાબડીની કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ?

ત્રણથી વધારે નાની મોટી લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી, અને તેમના પર પાટીઉં આડું મૂકવું; એટલે એમ જણાઈ આવશે કે તે પાટીઉં જુદી જુદી સ્થિતિમાં કેટલીક સળીઓના છેડાને અડકે છે અને કેટલીકના છેડાને અડકતું નથી. આ ઉપરથી તે બધા છેડા એક સપાટીમાં નથી એ નક્કી થશે. ગમે તે ત્રણ લાકડીના છેડા પર પાટીઉં મૂકીને, તે છેડાથી દર્શાવેલાં બિંદુઓની સપાટીમાં બીજા છેડા આવે એટલા માટે તેમને કેટલા ઉપર નીચે કરવા જોઈએ, એ છોકરાંને પૂછવું; એટલે તેમને સપાટીનો બરાબર ખ્યાલ આવશે.

મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજી ચીજોના જે ભાગ છે તે દેખાડો.

ધારો કે મેજના બે પાયા નીચે પત્થર મૂકવાથી મેજ ત્રાંસું થયું છે. હવે મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજા પદાર્થના જે ભાગ આવે છે તે બતાવો.

એકાદ પાટીઉં જુદી જુદી રીતે પકડીને તેની સપાટીમાં આવતા ભીંતના ભાગ બતાવવાને કહેવું. ભીંત ઉભી સપાટીમાં છે કે નહિ, એ આપણે શી રીતે જોઈ શકીશું ?

એક કાચનું પ્યાલું પાણીથી ભરો. પાણીના પૃષ્ઠની સપાટી કઈ ? આ કાર્ડ બીજી એક સપાટી છે એમ ધારો. કાર્ડ પાણીમાં ત્રાંસું બોળો. આપણે જોઈએ છીએ કે કાર્ડની સપાટી પાણીના પૃષ્ઠને છેદે છે. આ બે સપાટી જ્યાં એકમેકને છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? "લીટી."

એક વક્ર અને એક સીધું, અથવા બંને વક્ર પૃષ્ઠો એકમેકને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? "લીટી." તે કદી પણ સીધી લીટી હોય છે કે ? "ના. તે વાંકી લીટી હોય છે."

લીટી*

કાળા પાટીઆ પર પટી મૂકવી. પટીની બાજુએ ચાકની અણી પાટીઆ પર ધીમેથી દાબવી; એટલે પાટીઆ પર બિંદુ પડશે. પછી ચાક વચ્ચે વચ્ચે ઉપાડીને ખસેડતાં ખસેડતાં પાટીઆ પર ટપકાંની લીટી કરવી. આ ટપકાં વચ્ચેનું અંતર ઓછું થશે. એવી રીતે વારંવાર ટપકાં ઉમેર્યાં હોય, તો તે બધાં એકમેકમાં મળી જઈને લીટી તૈયાર થશે. એ પ્રમાણે પ્રયોગ કરીને ટપકાં ટપકાં મળીને લીટી તૈયાર થાય છે આ વાત† કઢાવવી.

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લેવાં, અને તેમની વચ્ચે એક સીધી લીટી અને કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરવી. પાણીમાં દોરો પલાળીને, દોરો લીટીઓની ઉપર પાથરીને, સર્વ લીટીઓની લંબાઈ માપવી. કઈ લીટી સૌથી ટુંકી છે ? આ લીટી સીધી છે કે વાંકી ? "સીધી." આના કરતાં ટુંકી લીટી આ બે બિંદુઓની વચ્ચે દોરો. દોરી શકાય છે ? "ના." આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ધર્મ જાણવામાં આવે છે ? મુકરર અંતર પરનાં બે બિંદુઓની વચ્ચે જો કેટલીક લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની લંબાઈ પરથી સીધી લીટી કઈ છે તે જાણી શકાશે ?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તે પર (બે) ચુંકો ઠોકો. આ ચુંકો વચ્ચે એક દોરો તાણીને બાંધો. આ દોરાથી લાંબા દોરા લઈને તેમના છેડા આ ચુંકો વચ્ચે બાંધો. પહેલા દોરાથી અને બીજા દોરાથી જે લીટીઓ બને છે, તેમાંની કઈ લીટી સીધી લીટી જેવી દેખાય છે ? આ પરથી બે બિંદુ વચ્ચે જો એક સીધી લીટી અને

---

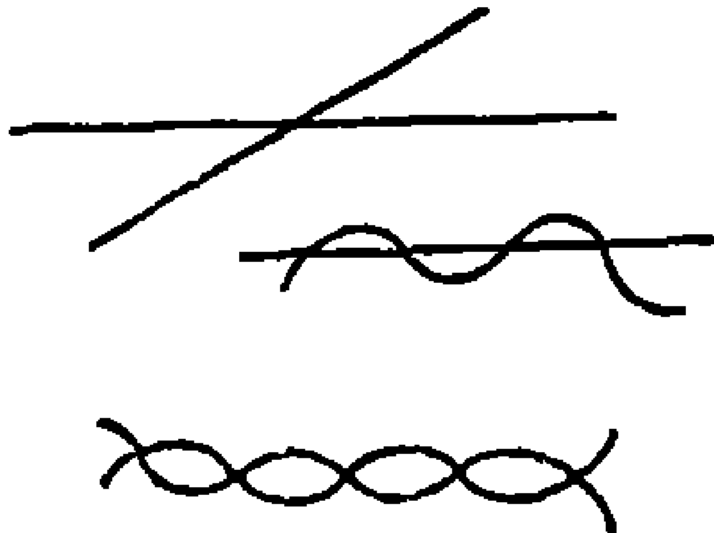
* આ ભાગમાં સીધી લીટી અને વક્ર લીટી વચ્ચેના તફાવતના સંબંધમાં વિચાર કર્યો છે; તેથી પહેલાંના સંકેત પ્રમાણે આ ભાગમાં 'લીટી' એ શબ્દનો અર્થ સીધી લીટી એમ ન લેતાં સાધારણ અર્થ લેવો.

† એ વાત ફક્ત સ્થૂળ રીતે જોતાં ખરી છે, એ યાદ રાખવું. શાસ્ત્રની દૃષ્ટિથી એમ કહેવું બરાબર નથી.

ાજી કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરી હોય, તો તે પૈકી સૌથી ટુંકી .ટી કઈ હોય છે, એ વિષે શું સમજાય છે?

બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી એક સીધી લીટી કાઢો. તેજ બિંદુઓને ાંધનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટીથી જુદી છે? "ના." આ બે બિંદુઓ વચ્ચે તમે બીજી કોઈ સીધી લીટી દોરી શકશો? ના." આ ઉપરથી સીધી લીટીનો બીજો કયો ધર્મ જણાઈ આવે છે?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તેમના પર ચુકો મારો. મની વચ્ચે એક દોરો ખેંચીને બાંધો. બીજા બે ત્રણ દોરા તેવીજ ને તાણીને બાંધો. તે દોરા એકજ સ્થાનમાં પડે છે, કે જુદાં જુદાં ાનમાં પડે છે? આ પરથી બે બિંદુઓની વચ્ચે જુદી જુદી સીધી ીટીઓ કેટલી કાઢી શકાશે, એ વિષે શું જણાય છે? "**એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી એકજ સીધી લીટી કાઢી શકાય છે.**"



એક સીધી લીટી દોરો. તેને દનારી બીજી એક સીધી લીટી રો. એક વાંકીચુંકી લીટી લો. ને વધારેમાં વધારે બિંદુઓમાં દનારી બીજી સીધી અથવા કી લીટી (આકૃતિમાં બતાવ્યા માણે) દોરો. બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુઓમાં દે છે? "એક." વાંકી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુમાં છેદે? "એકથી વધારે બિંદુઓમાં."

એકથી વધારે બિંદુઓમાં એક બીજીને છેદનારી બે સીધી ટીઓ દોરી શકાય કે? "ના." આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ર્મ સમજાય છે? "**બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને એકથી ધારે બિંદુઓમાં છેદતી નથી.**"

બે સીધી સળી લો, અને તેમની મદદથી કોઈ જગાને ઘેરી ાનો પ્રયત્ન કરો. જગા ઘેરી લઈ શકાય છે કે? "ના."

સીધી લીટી દોરો, અને તેમનાથી કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. તેમ કરી શકાય છે કે? "ના." બે વાંકી લીટીઓ લઈને તેમના વડે કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. ઘેરી શકાય છે કે? "હા." આ પરથી સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે શો તફાવત જણાય છે? "**બે સીધી લીટી જગા ઘેરી શકતી નથી.**"

એક આંખ મીચો, અને ઉઘાડી આંખ આગળ એક સીધી સળી અથવા એકાદ પાટીઆનો સીધો છેડો એવી રીતે ધરો, કે તેના બંને છેડા અને આંખ એકજ સીધી લીટીમાં આવે. પછી એજ રીતે વાંકી સળી, લીટી, કે પાટીઆની વાંકી ધાર જુઓ. શો ફરક જણાઈ આવે છે?

એક સીધી અને ત્રણ ચાર વાંકી લીટી લો. છેક પાતળા કાગળના અથવા ટ્રેસિંગ પેપરના જુદા જુદા કડકા પર તે લીટીઓની છાપ પાડો (નકલ પડે એમ કરો). એમાંથી દરેક કડકાને એવી રીતે વાળો કે તે પરની લીટીના ચાર ભાગ થાય. પછી દરેક લીટીના ગમે તે ભાગ પર, તેજ લીટીની છાપના ચાર ભાગમાંથી દરેક ભાગ મૂકીને તે નીચેની લીટી પર બરાબર આવી રહે છે કે કેમ તે જુઓ. કાગળના કકડા ઉથલાવીને તેજ પ્રયોગ કરો. સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે આ પ્રયોગ પરથી શો ફરક જણાય છે? "સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તેના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર મૂક્યો હોય, તો તે તે પર બરાબર આવી રહે છે; પણ વાંકી લીટીઓનું એમ થતું નથી."

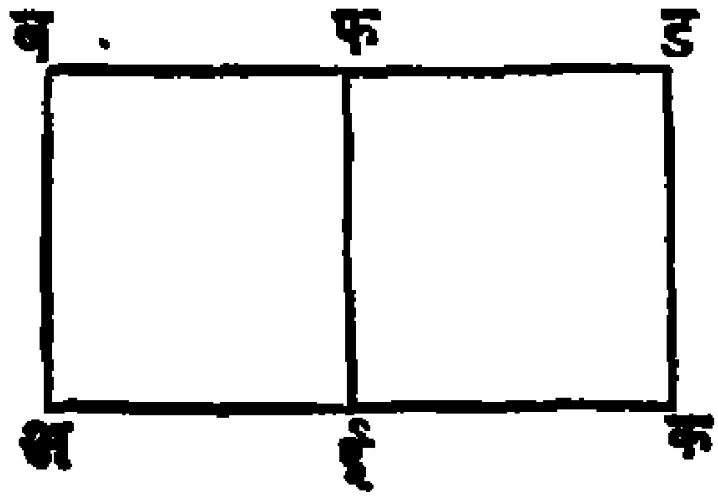
વ્યાખ્યા:—કોઈ પણ લીટીનો ગમે તે ભાગ (ઉલટાવ્યો હોય તોપણ) ઉંચકીને તેજ લીટીના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર (બંને ભાગો એકજ દિશામાં રહે એવી રીતે) મૂક્યો હોય, ને તે તે પર બરાબર બેસે, તો તેને **સીધી લીટી** કહે છે. કોઈ સીધી લીટીમાંનું એક બિંદુ આપ્યું હોય, તો તે બિંદુ પરથી તે લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે કહી શકાય કે? "ના." ત્યારે કોઈ સીધી લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે નક્કી કરવા માટે તે લીટીમાંનાં ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જાણવાની જરૂર છે. "બે."

આપેલાં બે બિંદુ વચ્ચે સીધી લીટી શી રીતે દોરશો ?

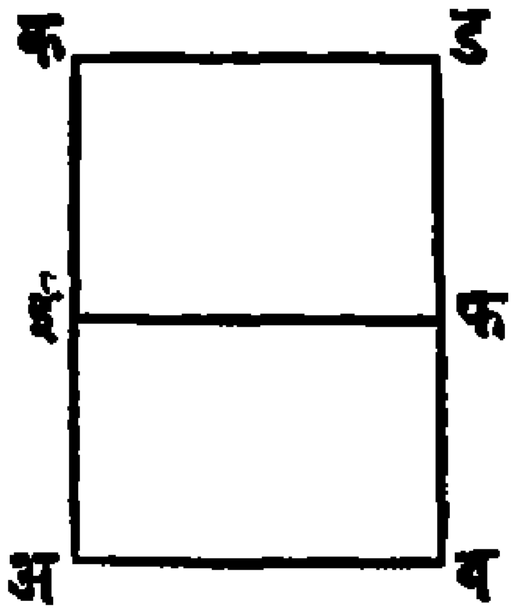
આપેલી લીટીઓમાંથી સીધી કઈ અને વાંકી કઈ, એ તેમની વચ્ચે દોરો તાણી બાંધીને શી રીતે કહેશો ?

કોઈ ખેતરમાં એક ઝાડથી બીજા ઝાડ સુધી દોરીની મદદથી સીધી લીટી કેવી રીતે કાઢશો ?

अबडक એક વીસ ઇંચ લાંબો અને દસ ઇંચ પહોળો કાગળનો કડકો છે. એને બરાબર વચ્ચેથી વાળ્યો હોય, તો તેના જે બે ભાગ થશે તે આકૃતિથી દર્શાવવા છે. તે દર્શાવવા માટે પાસે દોરેલી છે તેવી આકૃતિ દોરી છે, એમ ધારો. આ આકૃતિમાં **ईफ** લીટી શું દર્શાવે છે ? "**अबडक** કાગળના કકડાને દુભાગનાર સળની જગા." **ईफ** લીટીની દિશામાં એક આગળ એક, એમ લીટીઓ દોરીને **ईफ** અને **अब** વચ્ચેની જગા પૂરી દો. એવી કેટલી લીટીઓ દોરી શકાય ? ધારો કે દસ લીટીઓ દોરી શકાય છે. જો દસ લીટીઓ વડે **ई**થી **अ** સુધીની જગા પુરાઈ જાય, અને **ई**થી **अ** સુધીનું અંતર ૧૦ ઇંચ હોય, તો દરેક લીટી કાગળની કેટલી લંબાઈ દર્શાવે છે ? "એક ઇંચ." જો દરેક લીટી કાગળનો એક ઇંચ પહોળો કકડો દર્શાવે છે, તો **ईफ** લીટી જે સળ બતાવે છે, તે સળ ખરેખર એક ઇંચ પહોળો છે કે ? તેની ખરી પહોળાઈ કેટલી ? સળે સળે કાગળ કાપ્યો હોય, તો સળની પહોળાઈ કાગળના કયા ભાગમાં જશે ? તે કોઈ પણ ભાગમાં ન જાય એવી રીતે કાગળ કાપી શકાશે કે નહિ ? "કાપી શકાશે." ત્યારે સળને પહોળાઈ છે કે ? "ના." સળને જો પહોળાઈ નથી, તો **ईफ** લીટીને પહોળાઈ શા માટે છે ?



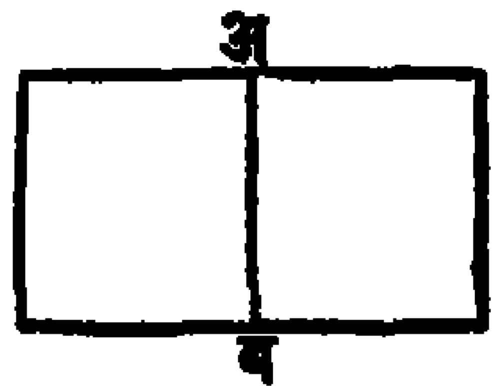
अबडक એક ખેતર છે, અને તે **क्ष** અને **ज्ञ** એ બે ભાઈએ વહેંચી લેવું છે. તેમણે તેના **अबफई** અને **ईफडक** એવા બે સરખા ભાગ કર્યા, અને દરેક જણે એકેક ભાગ લીધેા. ધારો કે **क्ष**ને ભાગે દક્ષિણ તરફનેા કકડેા આવ્યેા, અને **ज्ञ**ને ભાગે ઉત્તર તરફનેા કકડેા આવ્યેા. આ બે કકડા પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા છે. તેમની વચ્ચે કંઈ જગા છે કે? "ના."



છે એમ જો તમે કહેા, તેા તે બે ભાઈઓમાંથી કેાને ભાગે આવી છે, એ તમારે કહેવું જોઈએ. બે કકડાની વચ્ચે જો જગા નથી, તેા **ईफ** લીટી દેારી છે તે શા માટે? તે લીટી ખેતરનેા કયેા ભાગ દર્શાવે છે? "કેાઈ પણ નહિ." **ईफ** લીટીની નીચે **अब** લીટી સુધી એકમેકને અડકાડીને એક પછી એક લીટીઓ દેારેા. ધારેા કે એવી વીસ લીટીઓ **ईफ**થી **अब** સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો વીસ લીટીઓ વડે **ई**થી **अ** સુધીની જગા રેાકાઈ જાય, અને **ईअ**ની લંબાઈ જો વીસ ફુટ હેાય, તેા દરેક લીટી કેટલી જગા દર્શાવે? "એક ફુટ પહેાળી." **ईफ** લીટી એક ફુટ પહેાળી જગા દર્શાવે, તેા એ કકડેા (**ईफ** લીટીથી દર્શાવાતી એક ફુટ પહેાળી અને ... ફુટ લાંબી જગેા) કેાનેા? **क्ष**ના અને **ज्ञ**ના ભાગના કકડાઓની વચ્ચે જો જગા રાખવાનું કારણ નથી, તેા **ईफ** લીટી શા માટે દેારી છે? "......" જો આ લીટી જગા દર્શાવતી નથી, તેા તે ખરેખર શું દર્શાવે છે? "**ज्ञ**ની જમીન ક્યાં પુરી થાય છે, અને **क्ष**ની જમીન ક્યાં શરૂ થાય છે, તે તે દર્શાવે છે."

ત્યારે લીટી ખરેખર જગા દેખાડે છે, કે હદ? "હદ."

બે છેક લીસા ઘન લઈને એક બીજાને બરાબર અડકાડીને મૂક્યા હેાય, તેા તેમનું ચિત્ર આપણે શી રીતે દેારીશું? પાસે દેારેલી આકૃતિ જુઓ. આ આકૃતિમાં **अब** લીટી કાગળ પર કેટલીક જગા રેાકે છે, એ કારણથી શું આપણે બે



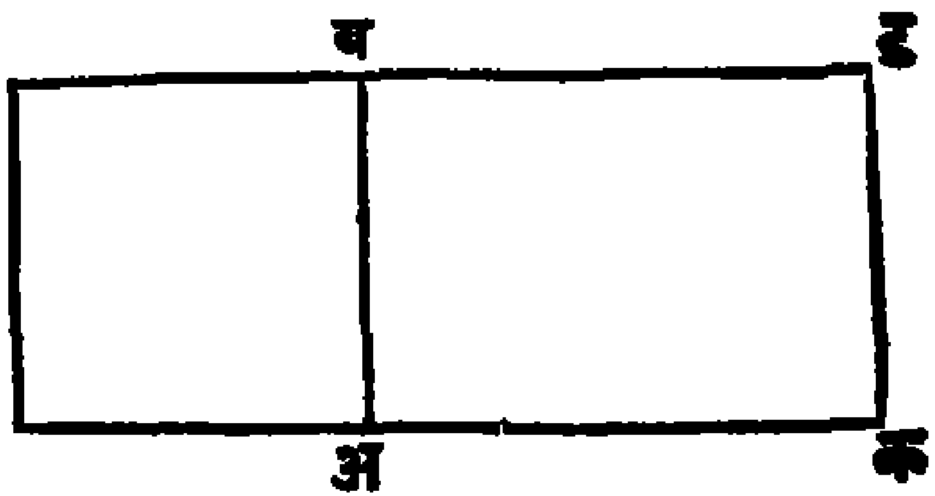
ઘનની વચ્ચે કેટલી જગા છે એમ ધારી શકીએ ? "ના." ત્યારે આ લીટી શા માટે દોરી છે ? આ લીટી ક્ષેત્રફળ દેખાડે છે કે હદ ? "હદ"

એક કાગળના કેટલાક ભાગને કાળો કે બીજો કોઈ રંગ લગાડ્યો હોય, તો તે રંગેલો ભાગ અને બાકીનો ધોળો ભાગ, એમની વચ્ચેની હદનો રંગ શો ? તેને જો રંગ નથી, તો હદ દેખાડનારી લીટીની પહોળાઈ કેટલી ? આ લીટીને પહોળાઈ હોઈ શકે ? "ના."

ઉપલા દાખલામાં બે ઘન જ્યાં એક બીજાને મળે છે, અથવા જ્યાં ખેતરના બે ભાગ એક બીજાને મળે છે, તે જગાને પહોળાઈ છે કે ? "ના." લંબાઈ છે કે ? "છે." આ જગા દેખાડવાને આપણે જે લીટી દોરીએ છીએ, તેને સહેજસાજ તો પહોળાઈ છેજ; પણ મૂળ જગાને પહોળાઈ ન હોય તો તે જગા દર્શાવનારી લીટીને પહોળાઈ શા માટે રાખવી ? પહોળાઈ રાખ્યા વગર તે લીટી દોરી શકાશે ? "ના." એવી લીટી કાઢી શકાય નહિ, તેથી આપણે લીટીને પહોળાઈ રાખીએ છીએ. બાકી ખરેખર જોતાં **લીટીને પહોળાઈ હોતી નથી.***

---

* પાસે દેખાડેલી આકૃતિ એક ખેતરનો નકશો છે. ધારો કે તેમાં अ ઝાડથી ब ઝાડ સુધી એક કરોળીઆએ પોતાનો તાંતણો તાણ્યો છે. હવે ખેતરના નકશાનું સ્કેલ આપ્યું હોય, તો કરોળીઆના તાંતણાની લંબાઈ કેટલી



છે તે કહી શકશો ? ધારો કે તે સ્કેલ ૧"=૧૦' છે; તો તે તાંતણાની લંબાઈ શી રીતે નક્કી કરશો ? "अब લંબાઈ માપો. તે જેટલા ઇંચ થાય તેને ૧૦એ ગુણો. જવાબ આવે તેટલા ફૂટ સમજવા." अब લીટીને કંઈ પહોળાઈ છે કે ? "ના," એમ કદાચ તમે કહેશો. अबથી આકૃતિનાં છેડા સુધી એક બીજાને અડકી રહે એવી લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી ૧૨૦ લીટી अबથી कड સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો बથી क સુધીનું

લીટી દોરવાનો હેતુ—કોઈ પદાર્થ ક્યાં શરૂ થાય છે, તે ક્યાં પુરો થાય છે, તેનો આકાર કેવો છે, અથવા તે કઈ દિશા તરફ વધે છે, એ દેખાડવા માટે આપણે લીટી દોરીએ છીએ.

તેથીજ, જેને લંબાઈ છે પણ (ખરી) પહોળાઈ નથી તે **લીટી**, એવી લીટીની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

વાળ અથવા ઝીણો દોરો એ લીટી છે કે? "ના." કારણ કહો. અક્ષાંશવૃત્તો, રેખાંશવૃત્તો,......વગેરે લીટીઓ છે કે? કારણ કહો. લીટીને લંબાઈ, પહોળાઈ, જાડાઈ, એમાંથી કયાં પરિમેયો હોય છે? "લંબાઈ." ત્યારે હવે લીટીને કેટલાં પરિમેયો હોય છે? "એક."

બિંદુ.

એક બીજીને છેદતી બે લીટી દોરો. આ લીટીઓ એક બીજીને જે ભાગમાં છેદે છે, તે ભાગ સિવાય બાકીનો બધો ભાગ ભૂસી નાખો. જે ભાગ રહ્યો છે, તે જુઓ, અને બે લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે તે કહો. "બિંદુ."

એક દશાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક બીજીને છેદે, તો તે જે બિંદુમાં (એટલે જગામાં) છેદે છે, તે બિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી? "એક દશાંશ ઇંચ."

એક વીસાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક બીજીને છેદે, તો તે જે બિંદુમાં છેદે છે તે બિંદુની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી? "એક વીસાંશ ઇંચ."

અંતર ૧૦ ફુટ હોય તો દરેક લીટીની પહોળાઈ $\frac{૧૦ \times ૧૨ = ૧૨૦}{૧૨૦}$ = ૧ઇંચ અંતર દર્શાવે છે. જે લીટી કરોળીઆનો તાંતણો દર્શાવે છે, તે જો એક ઇંચ પહોળાઈ દર્શાવે, તો કરોળીઆના તાંતણાની પહોળાઈ (જાડાઈ) ૧ ઇંચ છે એમ નથી થતું કે? જો લીટીની લંબાઈ પરથી તાંતણાની લંબાઈ નક્કી કરવાની હોય, તો તેની પહોળાઈ પરથી તાંતણાની પહોળાઈ (જાડાઈ) શા માટે નક્કી ન કરવી? જેથી તાંતણાની પહોળાઈ (એટલે જાડાઈ) બરાબર દર્શાવી શકાય એવી લીટી દોરો. "એવી લીટી કાઢી શકાતી નથી." ત્યારે લીટીને પહોળાઈ નથી એમ માનવાની ખાસ જરૂર છે? "હા."

હવે જો લીટીને ખરેખર પહોળાઈ નથી, તો બે લીટીઓ એક બીજીને જે બિંદુમાં છેદે છે તે બિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ? "બીલકુલ નહિ."

બે લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં બિંદુ બને છે. લીટીને ખરી પહોળાઈ હોતી નથી, માટે બિંદુને પણ લંબાઈ પહોળાઈ હોતી નથી. એમ છતાં બિંદુ અમુક સ્થાનમાં હોય છે, તેથી તેને **સ્થાન** કે **સ્થિતિ** હોય છે.

તેથી, 'જેને સ્થિતિ છે પણ મહત્ત્વ નથી તે **બિંદુ**,' એવી બિંદુની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

પૃથ્વીના ધ્રુવ, સોયની અણી, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, ગુરુત્વમધ્યબિંદુ, ખુણાનું શિરોબિંદુ,.........એ પૈકી બિંદુ ક્યાં છે અને ક્યાં નથી ?

પહોળાઈ વગરની લીટી, અને લંબાઈ પહોળાઈ વગરનું બિંદુ, કાઢવાં અશક્ય છે, માટે જે બિંદુ અને લીટીઓ આપણે કાઢીએ છીએ, તેમને ઉપલી વ્યાખ્યા લાગુ પડતી નથી.

બિંદુ આગળ ખસતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે લીટી બને છે; લીટી લંબાઈની સાથે ખુણો કરીને ખસતી ગઈ એવી કલ્પના કરીએ, એટલે પૃષ્ઠ બને છે; અને પૃષ્ઠ લંબાઈ અને પહોળાઈ જોડે ખુણો કરીને વધતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે ઘનાકૃતિ બને છે.

નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.

ખંડ બીજો.

(પ્રમેય-સિદ્ધાંત.)

કેટલીક પારિભાષિક સંજ્ઞાઓનો અર્થ.

(નીચેનું સ્પષ્ટીકરણ દેવકુળેકૃત યુકિલડમાંથી લીધું છે.)

સિદ્ધાંત—જે શબ્દસમૂહમાં (૧) કંઈ સત્ય સિદ્ધ કરેલું હોય છે અથવા (૨) કંઈ રચના કરી બતાવેલી હોય છે, તે શબ્દસમૂહને **સિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રમેય અને **કૃત્ય**—ઉપર સિદ્ધાંતના લક્ષણમાં જે બે પ્રકારના શબ્દસમૂહ કહ્યા, તેમાંથી પહેલાને **પ્રમેય** કહે છે, અને બીજાને **કૃત્ય** કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જે સિદ્ધાંત બીજા કોઈ સિદ્ધાંતમાંથી એમ ને એમ નીકળે છે, અથવા જે તેની મદદથી ટુંકામાં સિદ્ધ થાય છે, તેને તે સિદ્ધાંતનો **ઉપસિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રતિજ્ઞા—અમુક એક અથવા વધારે બાબતો આપેલી છે અને અમુક એક બાબત સિદ્ધ કરવી છે, એવું જે શબ્દસમૂહમાં જણાવેલું હોય છે, તેને **પ્રતિજ્ઞા** કહે છે. જેમકે:—"સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે."

. **પક્ષ** અને **સાધ્ય**—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાં જે (એક કે વધારે) બાબતો આપેલી હોય છે, તે બધી એકઠી મળીને તે સિદ્ધાંતમાંનો **પક્ષ** કહેવાય છે; અને જે બાબત સિદ્ધ કરવાની હોય છે, અથવા જે એક કૃતિ કરવાની હોય છે, તે તે સિદ્ધાંતમાંનું **સાધ્ય** કહેવાય છે

વ્યત્યાસ—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાંના પક્ષને બદલે, અથવા પક્ષમાં અનેક બાબતો હોય તો તેમાંથી કોઈ એક બાબતને બદલે, તેમાં સાધ્ય મુક્યું હોય;' અને સાધ્યને બદલે પક્ષ અથવા પક્ષમાંની તેવી એક બાબત મૂકી હોય, તો એવી રીતે જે સિદ્ધાંત થાય છે તેને મૂળ સિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ કહે છે. જેમકે:—"સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે," આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો "સમકોણ ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે," એ તેનો વ્યત્યાસ થાય. "જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાંગી શકાય છે, અ

જેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે, તે સંખ્યા ૬ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે;" આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો "જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે અને આખી સંખ્યા પુરેપુરી રીતે ૬ વડે ભાગી શકાય છે, તેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે;" આ તેનો વ્યત્યાસ થાય.

સૂચના—(૧) આગળનાં પ્રમેયોમાં જે રચનાની જરૂર પડશે, તે આ પુસ્તકના પહેલા પ્રકરણમાં કહ્યા પ્રમાણે કરવાની છે. આ રચનાને ત્રીજા ખંડમાં આપેલા કૃત્યસિદ્ધાંતોની જરૂર નથી. કૃત્યોમાં રચના કરવાની રીત ઉપરાંત રચનાની સિદ્ધતા આપેલી હોય છે, પરન્તુ આ સિદ્ધતાની પ્રમેયોને જરૂર નથી; કારણ કે પ્રમેયોને જરૂરની રચના બરાબર છે એમ ધારી લીધું હોય તોપણ ચાલે; માત્ર એ રચના કરવી શક્ય હોવી જોઈએ; નહિતો (આ રચના પર આધાર રાખતી) સિદ્ધતા ખોટી ઠરશે. આ કારણને લીધે નવી ભૂમિતિમાં કૃત્યોના પહેલાં પ્રમેયો શીખવી શકાય છે.

(૨) નવી ભૂમિતિમાં સર્વ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવાની બહુ જરૂર છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

સંક્ષેપચિહ્નોનો અર્થ.

$+$ એટલે વત્તા. — $-$ એટલે ઓછા.

$=$ એટલે ની બરાબર. — $\parallel$ એટલે સમાંતર.

$>$ એટલે થી મોટો. — $<$ એટલે થી નાનો.

$\therefore$ એટલે માટે, તેથી. — $\because$ એટલે કારણ કે.

$\angle$ એટલે ખુણો. — $\triangle$ એટલે ત્રિકોણ.

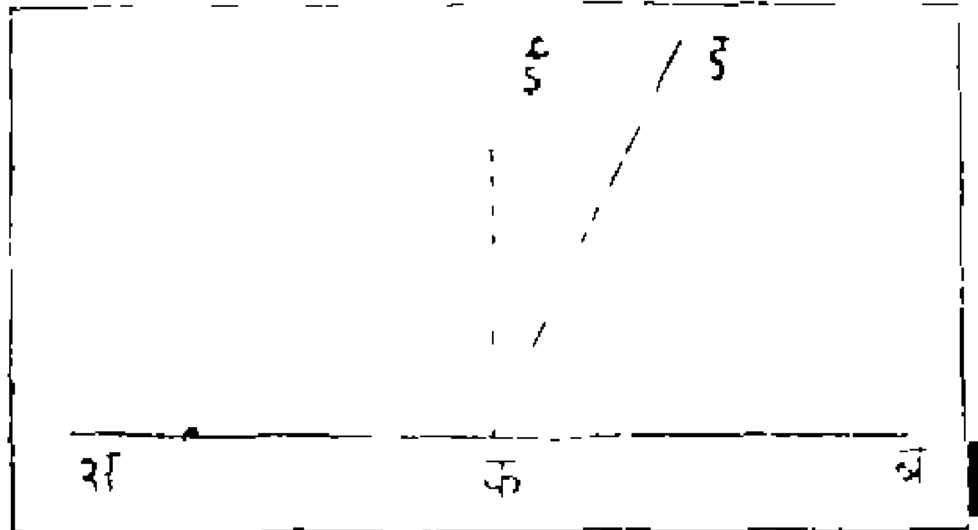
$\odot$ એટલે વર્તુળ. —  એટલે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

$\equiv$ એટલે એકરૂપ (બધી રીતે સરખા) છે.

પ્ર૦ એટલે પ્રમેય. — કૃ૦ એટલે કૃત્ય.

પ્રમેય ૧.

એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી પર પડે, તો તે બીજી લીટીની એક બાજુએ જે પાસપાસેના બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—**ડક** સીધી લીટી **અબ** સીધી લીટી પર પડે છે.

સાધ્ય—∠**અકડ** + ∠**બકડ** = ૨ કાટખુણા.

અબ પર **ડક** લંબ હોય, તો ∠**અકડ**+∠**બકડ** = ૨ કાટખુણા એ સિદ્ધજ છે. પરંતુ **અબ** પર **ડક** લંબ ન હોય તો–

રચના—**અબ** પર **કઈ** લંબ દોરો.

સિદ્ધતા—∠**અકડ** = ∠**અકઈ** + ∠**ઈકડ**, (પ્રત્યક્ષ.)

∠**બકડ** = ∠**બકઈ** – ∠**ઈકડ**, ”

∴ ∠**અકડ** + ∠**બકડ** = ∠**અકઈ** + ∠**બકઈ**.

પણ ∠**અકઈ** + ∠**બકઈ**=૨ કાટખુણા. (રચના)

∴ ∠**અકડ** + ∠**બકડ** = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—એક બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ દોરી હોય, તો તે લીટીઓ વચ્ચે થતા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૪ કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૧લા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **અમબ** અને **કમડ** આ બે લીટીઓ એક બીજીને **મ** બિંદુમાં છેદે છે, અને **અમક** કાટખુણો છે; તો **મ** બિંદુ પાસેના બાકીના કાટખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**अबक**=∠**अकब**, અને **बक**ને બંને બાજુએ વધારેલી છે; તો બહારના ખુણા સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

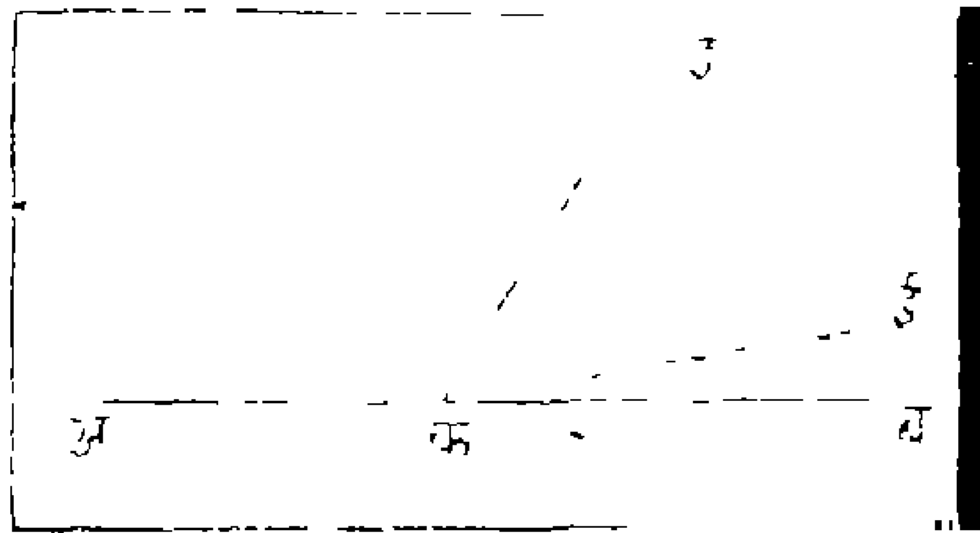
૩. **अबक** ખુણાને **बड**થી દુભાગ્યો છે, અને **डब**, **ई** સુધી વધારેલી છે; તો ∠**अबई** = ∠**कबई** એ સિદ્ધ કરો.

૪. **अब** લીટીને **कड** લીટી **क** બિંદુમાં મળે છે, અને ∠**अकड**, ∠**डकब** અનુક્રમે **कई** અને **कफ** લીટીઓ વડે દુભાગેલા છે; તો ∠**ईकफ** કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. જો **अब** લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ **अब**ની એકજ બાજુએ દોરેલી હોય, તો તેથી બનેલા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૨ કાટખુણા બરાબર છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨.

જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય, તો તે ખુણાઓના બહારના ભુજો એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.



પક્ષ—अकड અને **डकब** એ પાસપાસેના ખુણા છે, અને તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા છે.

સાધ્ય—कअ અને **कब** એકજ સીધી લીટીમાં છે.

રચના—જો **कअ** અને **कब** એકજ સીધી લીટીમાં ન હોય, તો **अक**ને વધારીને **अकई** સીધી લીટી દોરો.

સિદ્ધતા—∵ अकई સીધી લીટી છે,

∴∠**अकड**+∠**डकई** = ૨ કાટખુણા. (પ્ર. ૧).

પણ ∠ અકડ+∠ ડકબ=૨ કાટખુણા, (પક્ષ)
∴∠ અકડ+∠ ડકઈ=∠ અકડ+∠ ડકબ.
દરેક બાજુમાંથી સાધારણ ∠ અકડ બાદ કર્યો;
∴ શેષ ∠ ડકઈ = શેષ ∠ ડકબ.

∴ કઈ, કબમાં મળી જાય છે, એટલે કઈ, કબની બહાર કે અંદર પડી શકતી નથી; અર્થાત્ કઅ, કબ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સૂચના—પ્રમેય ૧માં કઅ અને કબ એક સીધી લીટીમાં છે, એ પક્ષ છે; અને ∠ અકડ+∠ બકડ=૨ કાટખુણા, એ સાધ્ય છે; અને બીજા પ્રમેયમાં ∠ અકડ+∠ બકડ=૨ કાટખુણા, એ પક્ષ છે, અને કઅ, કબ એક સીધી લીટીમાં છે એ સાધ્ય છે. માટે પ્રમેય ૨ પ્રમેય ૧ વ્યત્યાસ છે.

૨જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અબ લીટીમાંના અ બિંદુમાંથી અબની બંને બાજુએ કાટખુણા કરીને અક અને અડ લીટીઓ દોરેલી છે, તો કઅડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

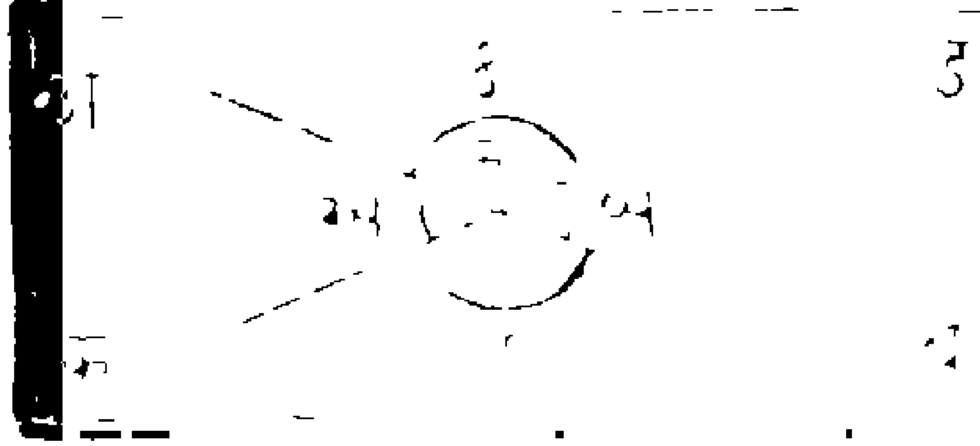
૨. અમક લીટીમાંના મ બિંદુમાંથી તેને બંને બાજુએ મબ, મડ લીટીઓ એવી દોરેલી છે, કે ∠ અમબ=∠ કમડ; તો બમડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૩. મ બિંદુમાંથી મબ, મઅ, મક, એ ત્રણ લીટી દોરેલી છે; અને મપ લીટી ∠ બમઅને અને મદ લીટી ∠ અમકને દુભાગે છે. હવે જો પમદ કાટખુણો હોય, તો બમક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪. બે લીટીઓ એક બીજીને કાટખુણે છેદે છે; તો તેમના સામસામા ખુણા દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૩.

જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદતી હોય, તો તેમના છેદનબિંદુ આગળના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—**अब** અને **कड** સીધી લીટીઓ **म** બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે, તેથી સામસામા ખુણાઓની બે જોડ થાય છે; એક ∠અ અને ∠બની બનેલી, અને બીજી ∠ક અને ∠ડ ની બનેલી.

સાધ્ય—∠અ =∠બ; અને ∠ક =∠ડ.

સિદ્ધતા—∴ **कमड** એક સીધી લીટી છે, અને **अम** તે પર પડે છે;

∴∠અ+∠ક=૨ કાટખુણા. (પ્ર૦ ૧)

∴**अमब** એક સીધી લીટી છે, અને **कम** તે પર પડે છે;

∴∠બ+∠ક=૨ કાટખુણા. (પ્ર૦ ૧)

∴∠અ+∠ક = ∠બ+∠ક.

દરેક બાજુમાંથી ∠ક સાધારણ કાઢી લીધો;

∴ શેષ ∠અ = શેષ ∠બ.

તેજ પ્રમાણે ∠ક = ∠ડ એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

(∠ક=∠ડ) એ સિદ્ધ કરો.

૩જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. જો કાટખુણાના ભુજોને શિરોબિંદુ અથવા મેલનબિંદુની* બીજી બાજુએ વધાર્યા હોય, તો બીજા જે ત્રણ ખુણા થાય છે તે બધા કાટખુણા હોય છે.

૨. **अमड** અને **बमक** એ લીટીઓ એક બીજીને **म** બિંદુમાં છેદે છે. **मय** ∠**अमब**ને દુભાગે છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે **मय** વધારી હોય તો તે ∠**कमड**ને દુભાગે છે.

---

*જે બિંદુમાં બે અથવા વધારે લીટીઓ મળે છે તેને તેમનું **મેલનબિંદુ** કહે છે.

પ્રમેય ૧થી ૩ ઉપરના પ્રશ્ન.

૧. સીધી લીટીને વર્તુળાકારમાં ફેરવીને પ્રમેય ૧ અને ૩ સિદ્ધ કરો.

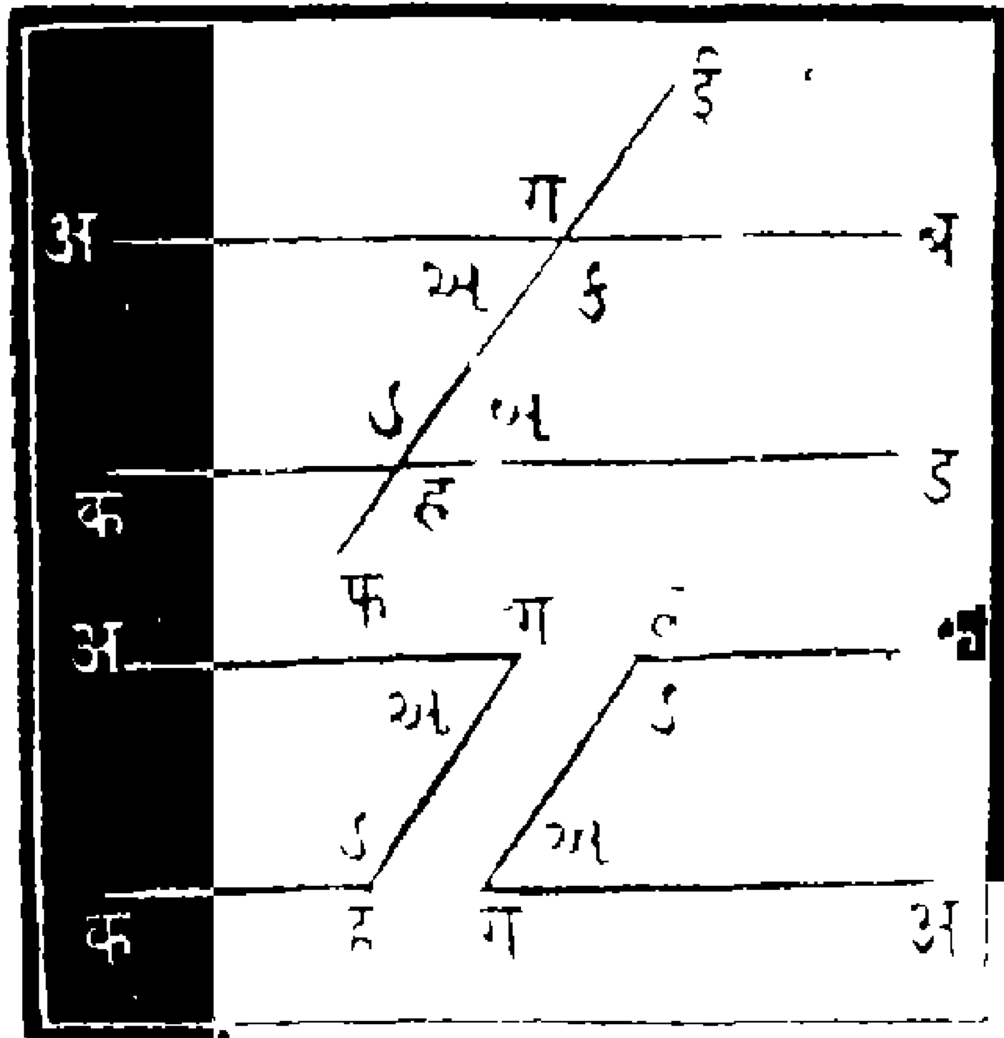
૨. એક બીજીને છેદનારી બે લીટીથી થએલા સામસામા બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. म બિંદુમાંથી मअ, मब, मक, मड, આ સીધી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે ∠अमब=∠कमड, અને ∠बमक=∠अमड; તો अम અને मक, તેમજ बम, અને मड લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. કોઈ પણ ખુણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખુણાના બંને ભુજ પર દોરેલા લંબોની વચ્ચેનો ખુણો મૂળ ખુણાની બરાબર હોય છે, અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

પ્રમેય ૪.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને છેદે અને વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—**अब** અને **कड** લીટીઓને **ईफ** લીટી **ग** અને **ह** બિંદુઓમાં છેદે છે, અને ∠અ અને ∠બ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

સાધ્ય—**अब** ∥ **कड**.

સિદ્ધતા—

∴ ∠અ+∠ક = ૨ કાટખુણા, (પ્ર. ૧)

અને ∠બ+∠ડ = ૨ કાટખુણા, (પ્ર. ૧)

∴ ∠અ+∠ક = ∠બ+∠ડ.

પણ ∠અ = ∠બ, (પક્ષ)

∴ ∠ક = ∠ડ.

अगहक આકૃતિ કાપી કાઢો (અથવા તેની નકલ લો) અને તે **बगहड** આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકો, કે **ह** બિંદુ **ग** પર પડે, અને **हक**, **गब**ની દિશામાં પડે,

તો ∵ ∠ડ = ∠ક, (ઉપર સિદ્ધ કર્યુ છે.)

∴ **हग**, **गह**ની દિશામાં પડશે.

અને ∵ **हग** = **गह**,

∴ **ग** બિંદુ **ह** બિંદુ પર પડશે.

હવે ∵ ∠અ=∠બ,

∴ **गअ**, **हड**ની દિશામાં પડશે.

આ પ્રયોગ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે **गब** અને **हड** જે દિશામાં પડે છે, તેજ દિશામાં **हक** અને **गअ** પડે છે.

હવે **अब**, **कड** લીટીઓ સમાંતર ન હોય, તો તે કોઈ પણ એક બાજુએ મળવી જોઈએ. તે **ब** અને **ड**ની બાજુએ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમનીજ દિશામાં પડનારી **हक**,**गअ** એ લીટીઓ પણ **अ** અને **क** તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ. પણ જો **अब**, **कड** એ **अ**, **क** તરફ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમની અને **गब**, **हड**ની દિશા એકજ હોવાથી **गब** અને **हड** પણ **ब**, **ड** તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ (એટલે કે **अब** અને **कड** બંને છેડા તરફ મળે છે).

પણ જો બે સીધી લીટીઓ વચ્ચે કંઈ અંતર છે, તે જો બંને છેડા તરફ મળે, તો એનો અર્થ એજ થાય કે બે સીધી લીટીઓ જગા ઘેરી લે છે. પણ આ વાત અશક્ય છે. (૧૦૯મા પાના પરનો પ્રયોગ જુઓ.) માટે સિદ્ધ થાય છે કે **अब,कड** કોઈ પણ બાજુએ મળતી નથી, એટલે તેઓ સમાંતર છે.

૪થા પ્રમેય પરનો પ્રશ્ન.

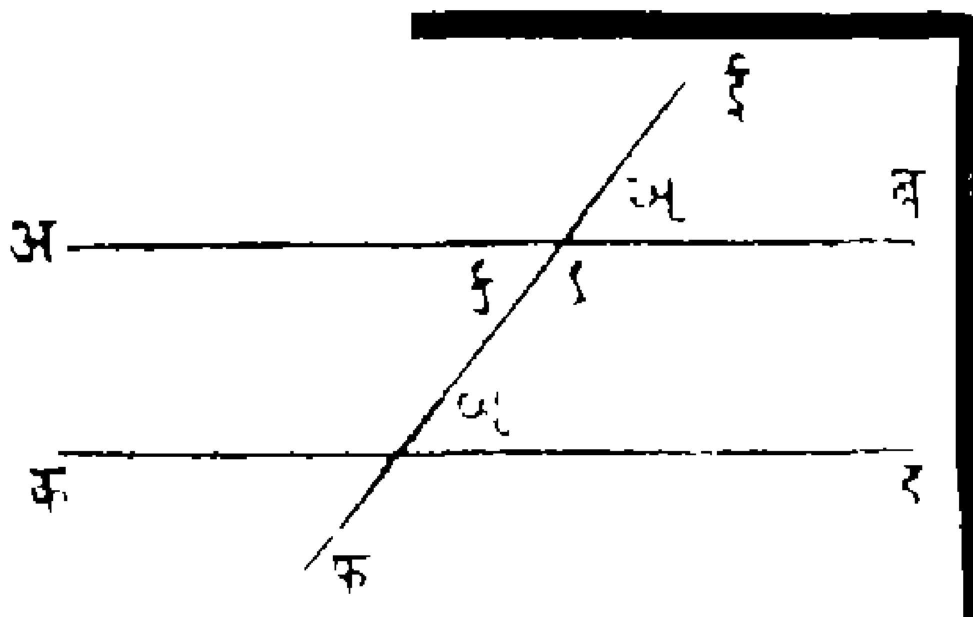
૧. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે અને **अक** તેનો કર્ણ છે. જો ∠**बअक** બરાબર ∠**अकड**, અને ∠**डअक** = ∠**अकब**, તો **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૫.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે કે—

(૧) બે સંગત ખુણા બરાબર હોય, અથવા

(૨) છેદક લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.



(૧) પક્ષ—**अब** અને **कड** લીટીઓને **ईफ** છેદે છે, અને સંગત ખુણા અ અને બ બરાબર છે.

સાધ્ય—**अब** ॥ **कड**.

સિદ્ધતા—

∠અ = સામેનો ∠ક; (પ્ર. ૩)

પણ ∠અ=∠બ, (પક્ષ)

∴∠બ = ∠ક.

અને ∵ ∠બ અને ∠ક વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે,

∴ अब ॥ कड (પ્ર. ૪)

(૨) પક્ષ—ईफ લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા બ અને ડ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

સાધ્ય—अब ॥ कड.

સિદ્ધતા—

∵ अब એક સીધી લીટી છે અને फई મળે છે,

∴ ∠ક+∠ડ=૨ કાટખુણા. (પ્ર. ૧)

પણ ∠બ+∠ડ=૨ કાટખુણા. (પક્ષ)

∴ ∠ક+∠ડ=∠બ+∠ડ.

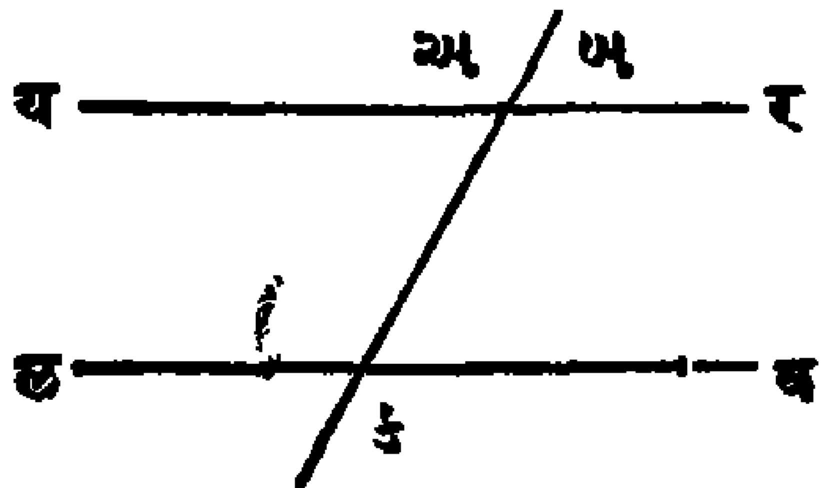
દરેક બાજુમાંથી ∠ડ એ સાધારણ ખુણો લઈ લીધો;

∴∠ક=∠બ.

અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,

∴ अब ॥ कड. (પ્ર ૪)

૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.



૧. પાસેની આકૃતિમાં

(૧) જો ∠અ=∠ક હોય,

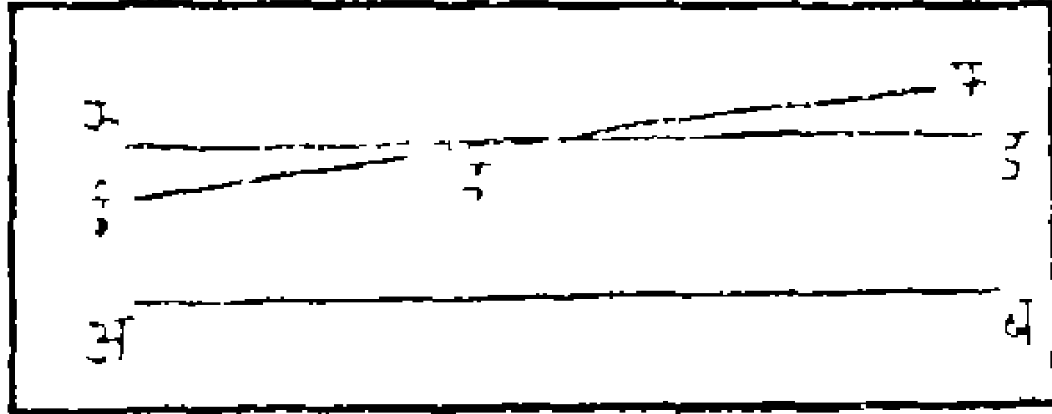
અથવા

(૨) ∠બ + ∠ક = ૨ કાટખુણા હોય; તો

यर ॥ लव છે એમ બતાવો.

૨. જો એક સીધી લીટી પર બે લંબ દોર્યા હોય, તો તે એક બીજાને સમાંતર હોય છે.

પ્લેફેરનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ—એક બીજીને છેદનારી બંને સીધી લીટી એક ત્રીજી સીધી લીટીને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.



દાખલા તરીકે, **કડ**, **ઈફ** સીધી લીટીઓ એક બીજીને **ગ** બિંદુમાં છેદે છે. એ પૈકી **કડ**, **અબ**ને સમાંતર છે; તો **ઈફ**, **અબ**ને સમાંતર હોઈ શકેજ નહિ. કારણ કે **કડ** લીટી **અબ**ને સમાંતર છે, એનો અર્થ એવો છે કે **કડ** અને **અબ**ની વચ્ચેનું બધું અંતર સરખું છે. હવે જ્યારે **ઈફ** અને **કડ**ની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું નથી, ત્યારે **ઈફ** અને **અબ** વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોઇ શકે નહિ. માટે **ઈફ**, **અબ**ને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં યુક્લિડનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે:—

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીને એવી રીતે છેદે, કે તેની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય, તો તે બે લીટીઓ, જે બાજુ પરના ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો છે, તે તરફ વધારવાથી મળશે.

આ વિધાન ખરૂં જોતાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; તે પ્રમેય ૮ના બીજા ઉપસિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ છે, એ આગળ જણાઈ આવશે.

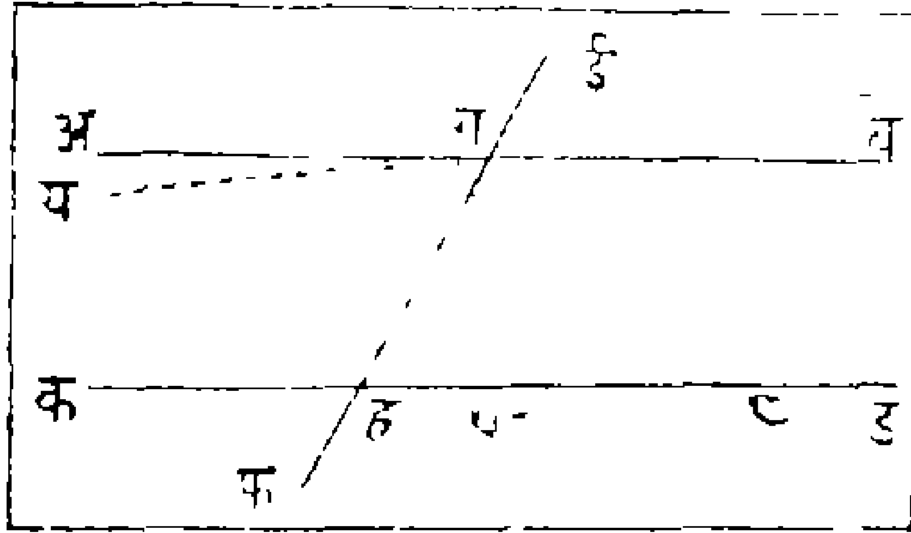
પ્રમેય ૯.

જો એક સીધી લીટી બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદે તો તે—

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા કરે છે;

(૨) સંગત ખુણાં સરખાં કરે છે; અને

(૩) છેદક લીટીની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક કરે છે.



પક્ષ—**अब** અને **कड** સીધી સમાંતર લીટીઓ છે, અને **ईफ** તેમને **ग** અને **ह**માં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) ∠**अगह** અને ∠**गहड** એ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે;

(૨) ∠**ईगब** અને ∠**गहड** એ સંગત ખુણા સરખા છે; અને

(૩) **ईफ**ની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા ∠**बगह** અને ∠**गहड** એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

રચના—જો ∠**अगह** અને ∠**गहड** સરખા ન હોય, તો એક **गय** લીટી એવી દોરો, કે **यगह** અને **गहड** વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા થાય.

(૧) સિદ્ધતા—

∵∠**यगह** = વ્યુત્ક્રમ ∠**गहड**, (રચના)

∴ **गय** ∥ **कड**. (પ્ર. ૪)

પણ **अब** ∥ **कड**, (પક્ષ)

∴ **गय** અને **अब** એ બંને **कड**ને સમાંતર.

પણ એ અશક્ય છે, (પ્લેફેરનું પ્ર. પ્ર.)

∴∠**अगह**, ∠**गहड**, એ સરખા નથી એમ માની શકાતું નથી; એટલે કે તે સરખાજ છે.

(એજ પ્રમાણે ∠बगह=∠गहक એ સિદ્ધ કરી શકાય.)

(૨) સિદ્ધતા—

∠ईगब = સામેનો ∠अगह, (પ્ર. ૩)

અને ∠अगह = ∠गहड, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

∴ ∠ईगब = ∠गहड.

(એજ પ્રમાણે ∠ईगअ = ∠गहक.)

(૩) સિદ્ધતા—

∵ ∠अगह = ∠गहड, (પ્ર. ૬, ભાગ ૧)

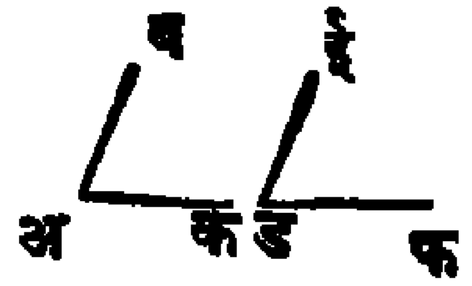
અને ∠बगह, ∠अगहનો ન્યૂનતાપૂરક છે.

∴ ∠बगह, गहडનો પણ ન્યૂનતાપૂરક છે.

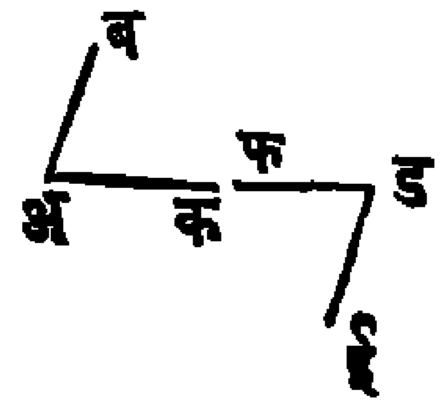
ઉપસિદ્ધાંત—જે બે ખુણાની બાજુઓ સમાંતર હોય, તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે.

ઉપલા ઉપસિદ્ધાંતના ૪ પ્રકાર થાય છેઃ—

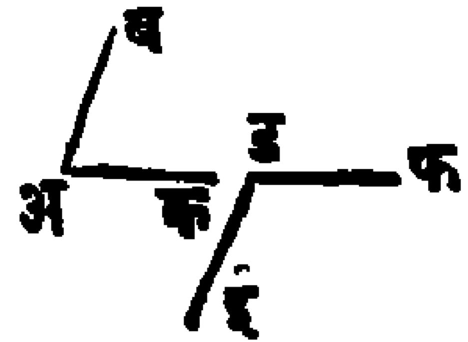
(૧) જો ∠बअक અને ∠ईडफની બાજુઓ સમાંતર હોય અને એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૨) જો ∠बअक અને ∠फडईની બાજુઓ સમાંતર હોય અને તે સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૩) डफ, अक એકજ દિશામાં દોરેલી છે; અને डई, अब સામસામી દિશામાં દોરેલી છે. આ બાબતમાં ખુણા ન્યૂનતાપૂરક છે.



(૪) જો डफ, अक સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, અને डई, अब એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોવા જોઈએ.



૬ઠ્ઠા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**ब**=∠**क**, **बक** પાયાને સમાંતર **डई** દોરેલી છે; તો ∠**अडई** = ∠**अईड** એ સિદ્ધ કરો.

૨. §* જે લીટી બે સમાંતર લીટીઓમાંથી એક પર લંબ હોય છે, તે બીજી પર પણ લંબ હોય છે.

૩. *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.

૪. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય, તે નક્કી કરો. (ગમે તે ત્રિકોણ લો, અને તેનાં પાયાના બંને છેડામાંથી ત્રિકોણની સામી બાજુએ ત્રિકોણની બે બાજુને સમાંતર સીધી લીટીઓ દોરો અને એવી રીતે ચતુષ્કોણ પુરો કરો. પછી ઉપલા સવાલનો જવાબ આપો.)

૫. * જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બીજા બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

૬. * જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે, કે તેથી લીટીની એકજ બાજુના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય; તો તે બાજુ તરફ તે બે સીધી લીટીઓ વધારવાથી મળશે, એમ સિદ્ધ કરો.

૭. એક બીજીને છેદનારી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેનો સાંકડો ખુણો, તે સીધી લીટીઓને સમાંતર હોઈને એકમેકને છેદનારી બીજી કોઈ પણ સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણાની બરાબર હોય છે, અને પહોળો ખુણો તેને મળતા આવતા પહોળા ખુણાની બરાબર હોય છે.

૮. એક ખુણાના ભુજો બીજાના ભુજો ઉપર લંબ છે; તો તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે એમ સિદ્ધ કરો.

---

§* આ ચિહ્ન જેમની શરૂઆતમાં છે તે પ્રશ્ન અગત્યના છે, એટલે બીજા પ્રશ્નો છોડવામાં તેમનો ઉપયોગ થવાનો વિશેષ સંભવ છે એમ જાણવું.

૯. બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી લીટીથી થતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને મળવાથી કાટખુણુ ચોખુણુ બને છે.

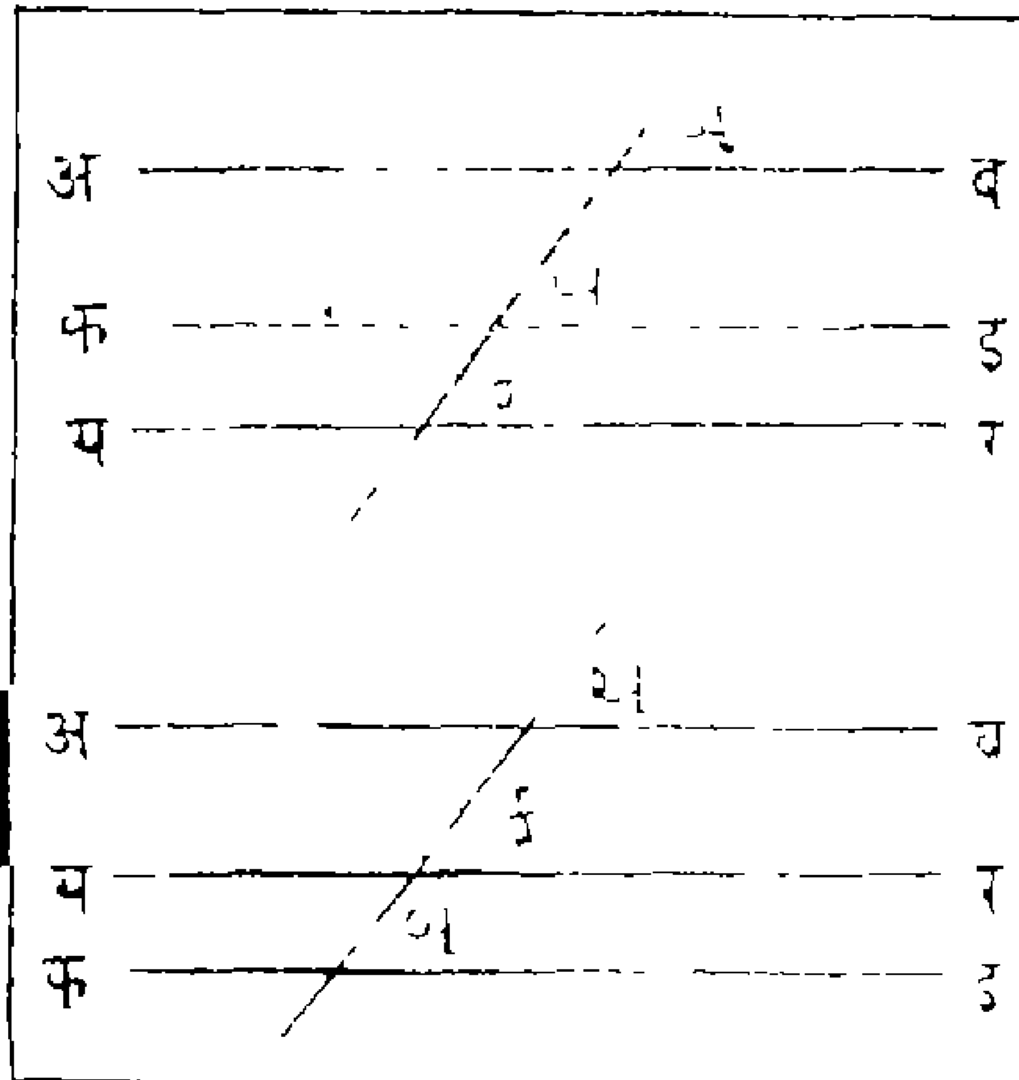
૧૦. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ કાટખુણુ ચોખુણુ કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. **अबक** ત્રિકોણના **अ** શિરોબિંદુમાંથી **बक** પાયાને સમાંતર સીધી લીટી દોરીને, ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા થાય છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૨. **अब** અને **कड** એ સમાંતર સીધી લીટીઓને **प** અને **द** બિંદુઓમાં છેદનારી એક સીધી લીટી દોરેલી છે. એકજ બાજુ પરના **प** અને **द** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે. આ આકૃતિને એક વખત **मप** અને એક વખતે **मद**માંથી વાળીને **म** બિંદુ **पद**, **अब**, અને **कड**થી સરખે અંતરે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૭.

જે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને સમાંતર હોય છે, તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—अब અને कड ॥ यर

સાધ્ય—अब ॥ कड.

રચના—अब, कड, અને यरને છેદનારી એક સીધી લીટી દોરો.

(∠અ,∠બ,∠ક, આ સંગત ખુણા છે.)

સિદ્ધતા—∵ अब ॥ यर, (પક્ષ.)

∴ ∠અ = સંગત ∠ક. (પ્ર. ૬)

તેમજ ∵ कड ॥ यर, (પક્ષ)

∴ ∠બ = સંગત ∠ક. (પ્ર. ૬)

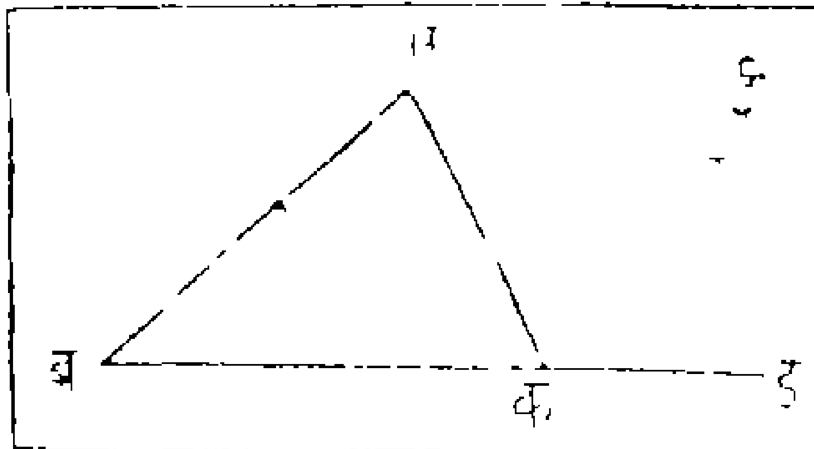
∴ ∠અ = ∠બ.

∵ આ ખુણા સંગત છે,

∴ अब ॥ कड. (પ્ર. ૫)

પ્રમેય ૮.

ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—अबक ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—∠अ + ∠ब + ∠क = ૨ કાટખુણા.

રચના—बकને ड સુધી વધારો. कમાંથી बअ ॥ कई દોરો.

સિદ્ધતા—∵ बअ અને कई સમાંતર સીધી લીટીઓને अक છેદે છે,

∴ ∠अ = વ્યુતક્રમ ∠अकई. (પ્ર. ૬)

અને ∵ बअ અને कई સમાંતર સીધી લીટીઓને बड છેદે છે,

∴ ∠ब = સંગત ∠इंकड. (પ્ર. ૬)

∴ ∠अ+∠ब=∠अकई+∠इंकड.

દરેક બાજુમાં ∠अकब ઉમેરો.

∴ ∠अ + ∠ब + ∠अकब = ∠अकई + ∠इंकड + ∠अकब.

પણ ∠अकब+ ∠अकई+ ∠इंकड=૨ કાટખુણા, (કારણ કે बकड એક સીધી લીટી છે); (પ્ર. ૧)

∴∠अ+∠ब+∠अकब = ૨ કાટખુણા.

એટલે अबक ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના અંદરના બે ખુણાના સરવાળાની બરાબર હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી બનેલો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના કોઈ પણ અંદરના ખુણાથી મોટો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૪—દરેક ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે ખુણા સાંકડા ખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૫—જો એક ત્રિકોણના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તેમના ત્રીજા ખુણા પણ સરખા હોય છે. (એવા ત્રિકોણોને પરસ્પર સમકોણ પણ કહે છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૬—ચતુષ્કોણના ચાર ખુણાનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. अबक ત્રિકોણમાં ∠ब=∠क છે; बअને अ તરફ ड સુધી લંબાવી છે; તો સાબીત કરો કે ∠कअड, ∠ब અથવા ∠कનો બમણો છે.

૨. કાટખુણ ત્રિકોણના બે સાંકડા ખુણા સરખા હોય, તો સાબીત કરો કે તે સરખા ખુણામાંનો દરેક ખુણો અર્ધો કાટખુણો છે.

૩. સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કાટખુણાના બે તૃતીયાંશ બરાબર હોય છે.

૪. **अबक** ત્રિકોણના **अ** અને **ब** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **ड**માં મળે છે; તો **अडब** ખુણો પહોળો છે એ સિદ્ધ કરો.

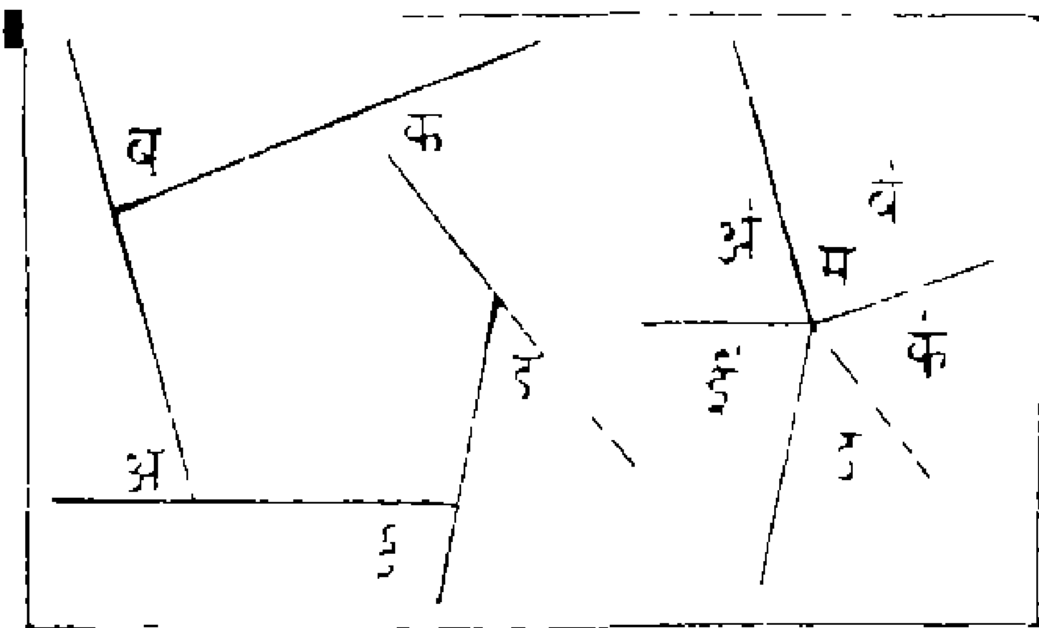
૫. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી ઓછો હોય, તો તે ખુણો સાંકડો હોય છે, એ સિદ્ધ કરો; અને એનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૬. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી વધારે હોય, તો તે પહોળો ખુણો હોય છે, આ નિયમ અને તેનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૭. કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબથી જે બે ત્રિકોણ થાય છે, તેમાંના દરેકના સર્વ ખુણા અનુક્રમે મૂળ કાટખુણ ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૯.

બહિર્વક* સીધીલીટી-આકૃતિની સર્વ બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારી હોય તો તેથી બનેલા બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.



*બહિર્વક—જેના સર્વ ખુણા બહારની બાજુથી બહિર્વક હોય અથવા અંદરની બાજુથી અંતર્વક હોય, એવી.

પક્ષ—**अबकडई** આ બહિર્વક્ર સીધીલીટીવાળી આકૃતિની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારવાથી ∠अ, ∠ब, ∠क, ∠ड, ∠ई, આ બહારના ખુણા બનેલા છે.

સાધ્ય—∠अ+∠ब+∠क+∠ड+∠ई = ૪ કાટખુણા.

રચના—આપેલી આકૃતિની બહાર કાંઈપણ म બિંદુ લેા. (આ બિંદુ આપેલી આકૃતિમાં લીધું હોય તોપણ ચાલે.)

આપેલી આકૃતિની બાજુઓ જે દિશામાં વધારેલી હોય, તેજ દિશામાં, તે આકૃતિની બાજુઓને સમાંતર સીધી લીટીઓ म બિંદુમાંથી દોરેા.

સિદ્ધતા—

∵ ∠अ, ∠ब, ∠क, ∠ड, ∠ईની બાજુઓને સમાંતર દોરેલી લીટીઓની વચ્ચે અનુક્રમે ∠अ', ∠ब', ∠क', ∠ड', ∠ई', આ ખુણા છે.

∴ ∠अ = ∠अ', ∠ब=∠ब', ∠क=∠क', ∠ड=∠ड', ∠ई=∠ई'. (છઠ્ઠા પ્રમેયનેા ઉપસિદ્ધાંત)

∴ ∠अ+∠ब+∠क+∠ड+∠ई=∠अ' + ∠ब'+ ∠क' + ∠ड'+∠ई'.

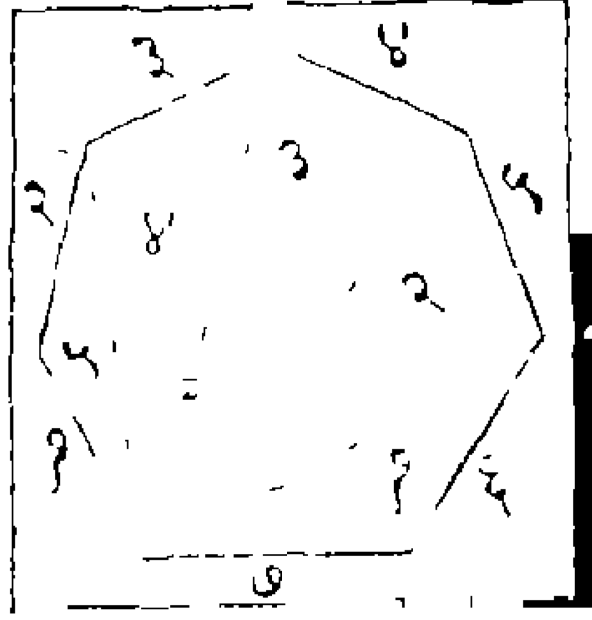
અને ∵ ∠अ'+∠ब'+∠क'+∠ड'+∠ई'=૪ કાટખુણા,(પ્ર.૧,ઉપ.)

∴ ∠अ+∠ब+∠क+∠ड+∠ई=૪ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—न બાજુની સીધીલીટીવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનેા સરવાળેા (૨ न−૪) કાટખુણા થાય છે.

૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પ્રમેય ૯નેા આધાર લીધા સિવાય ઉપલેા ઉપસિદ્ધાંત, એક શિરેાબિંદુને બીજાં શિરેાબિંદુઓની જોડે સાંધીને, અને એવી રીતે તે આકૃતિના ત્રિકેાણ બનાવીને, સિદ્ધ કરેા. (નીચેની આકૃતિ જુઓ. આ ત્રિકેાણની સંખ્યા न २ થાય છે.



૨. એક ત્રિકોણની **અબ**, **બક**, **કઅ** બાજુઓ વધારવાથી ત્રણ બહારના ખુણા થયા છે. આ બહારના ખુણા પૈકી બે ખુણાનો સરવાળો જો બહારના ત્રીજા ખુણાથી બમણો હોય, તો ત્રિકોણનો એક ખુણો કે કાટખુણો છે એ બતાવો.

૩. **અબક** ત્રિકોણમાં **અડ**, **બઈ**, **કફ** એવી દોરી છે, કે તેઓ **અબ**, **બક**, **કઅ**ની સાથે **ડઅબ**, **ઈબક**, **ફકઅ** ખુણા સરખા કરે છે. હવે જો **અડ**, **બઈ**, **કફ** એક બિંદુમાં ન મળતી હોય, તો તેઓ એક ત્રિકોણ કરશે, અને તેના ખુણા **અબક** ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર થશે, એ સિદ્ધ કરો.

૪. **અબકડઈ** એક પંચકોણ છે, અને એની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી. તે સર્વ બાજુઓ બંને તરફ વધારી હોય, તો **ફ**, **ગ**, **હ**, **ચ**, **છ** બિંદુઓમાં મળે છે; તો **ફ**, **ગ**, **હ**, **ચ**, **છ** ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે એ બતાવો.

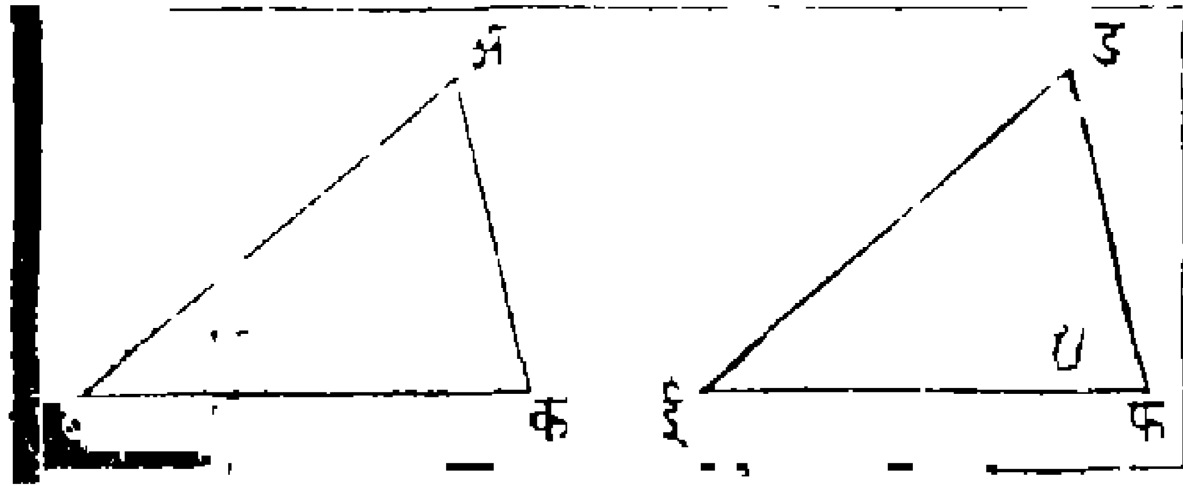
૫. જેમનો બહારનો ખુણો અનુક્રમે ૬૦°, ૩૦°, ૪૫°, હોય એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિને બાજુ કેટલી?

૬. જેનો એક બહારનો ખુણો ૧૫°, ૭°, ૧૧°, ૬°, ૫° અથવ ૪૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે?

૭. જેનો અંદરનો ખુણો ૧૦૮°, ૧૨૦°, ૧૩૦°, ૧૪૪°, અથવ ૯૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે?

પ્રમેય ૧૦.

જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** ત્રિકોણમાં **अब=डई**, **अक=डफ**, અને ∠**अ**=∠**ड**.

સાધ્ય—△**अबक**=△**डईफ**.

સિદ્ધતા—

△ **अबक**ને △**डईफ** પર એવી રીતે મૂકો, કે **अ** બિંદુ **ड** પર પડે, અને **अब** બાજુ **डई**ની દિશામાં પડે.

∵ **अब=डई**,

∴ **ब** શિરોબિંદુ **ई** પર પડે છે, (પક્ષ)

અને ∵ ∠**अ**=∠**ड**, (પક્ષ)

∴ **अक**, **डफ**ની દિશામાં પડે છે.

અને ∵ **अक=डफ**, (પક્ષ)

∴ **क** શિરોબિંદુ **फ** પર પડે છે.

∴ △ **अबक**, △ **डफई** પર બરાબર આવી રહે છે; એટલે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

૧૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. *જો **अब** અને **कड** સીધી લીટીઓ એક બીજીને કાટખુણે દુભાગે, તો **अकबड** આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

૨. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની अब અને अक સરખી બાજુઓમાં क्ष અને य બિંદુ એવાં લીધાં છે, કે अक्ष = अय; તો એમ સિદ્ધ કરો કે कक्ष = बय છે અને कक्ष અને बय, बक સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૩. *જો अब અને कड સીધી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે, તો अकबड આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થાય.

૪. *अबक ત્રિકોણના बक પાયાનું ड મધ્યબિંદુ છે. अ અને ड સાંધો, અને अडને ई સુધી એવી રીતે વધારો, કે डई = अड થાય. એમ સિદ્ધ કરો કે अब = ईक, અને अक ॥ ईब

૫. अबकड એક ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં अब = कड, अड = बक, અને ∠अ=∠क છે; તો अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. *ચોરસનો કર્ણ જે ખુણાઓમાં થઈને જાય છે તેમને દુભાગે છે અને ચોરસને પણ દુભાગે છે, એ સિદ્ધ કરો.

૭. *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ થાય છે, (૩) તે ત્રિકોણને દુભાગે છે, અને (૪) આ લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ પાયાના બે છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૮. *ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનાં મધ્યબિંદુમાંથી તે બાજુઓ પર દોરેલા લંબ જે બિંદુમાં મળે છે તે બિંદુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૯. * લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કોઈ પણ બિંદુ તે લીટીના બે છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૦. अबकड અને यरलव ચતુષ્કોણોમાં अब=यर,बक=रल कड=लव, ∠ब=∠र, અને ∠क = ∠ल; તો આ આકૃતિઓ એકરૂપ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૧. *अब અને कड લીટીઓ સરખી અને સમાંતર છે, તે अक અને बड સરખી અને સમાંતર છે એ બતાવો.

૧૨. બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનો એક ત્રિકોણ બીજા પર એવી રીતે મૂકેલો છે, કે તેમના પાયાની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે. હવે એમ સિદ્ધ કરો કે તે ત્રિકોણોમાંના એકનાં શિરોબિંદુઓની સાથે બીજા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ સરખી છે.

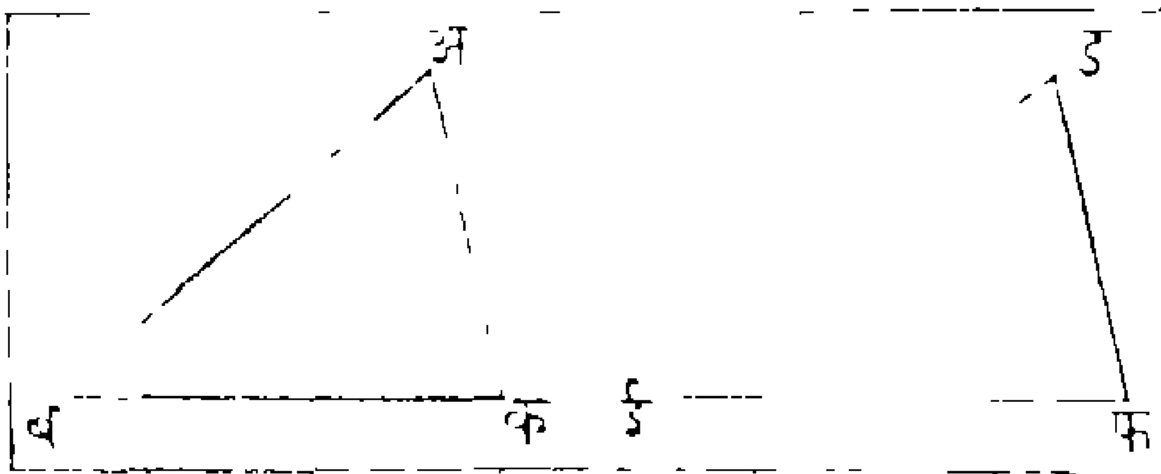
૧૩. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના **अब** અને **अक** બાજુ પર **अबह** અને **अकच** એવા સમબાજુ ત્રિકોણ બહારની બાજુએ દોરેલા છે; તો **कह** = **बच** એ સિદ્ધ કરો.

૧૪. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુ પર બહારની બાજુએ **अबहच** અને **अकलम** ચોરસ દોરેલા છે; તો **बम** = **कच** એ બતાવી આપો.

૧૫. **अबकड** ચોરસમાં **म** બિંદુ ગમે ત્યાં લીધેલું છે. **मअ** પર **अड**ની બાજુએ **अमईफ** ચોરસ દોર્યો છે; તો **बम**=**डफ** એ બતાવો.

પ્રમેય ૧૧.

જો બે ત્રિકોણમાંના એકના બે ખુણા અનુક્રમે બીજાના બે ખુણાની બરાબર હોય, અને એકની એક બાજુ તેને મળતી આવતી બીજાની એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પ્રકાર ૧લો—

પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** આ બે ત્રિકોણમાં ∠**ब** = ∠**ई**, ∠**क**=∠**फ**, અને **बक** = **ईफ** (સરખા ખુણાઓને અડકેલી બાજુઓ.)

સાધ્ય—△अबक=△डईफ.

સિદ્ધતા—

△अबक, △डईफ પર એવી રીતે મૂકો, કે ब, ई પર પડે, અને बक, ईफની દિશામાં પડે.

હવે ∵ बक=ईफ, (પક્ષ)

∴ क, फ પર પડે છે,

અને ∵ ∠ब=∠ई અને ∠क=∠फ, (પક્ષ)

∴ बअ, कअ અનુક્રમે ईड, फडની દિશામાં પડે છે.

∴ अ, ड પર આવી રહે છે.

∴ △ अबक =△ डईफ.

પ્રકાર ૨જો—

પક્ષ—अबक અને डईफ ત્રિકોણોમાં ∠ब=∠ई, ∠क=∠फ, અને अब=डई (બંને ત્રિકોણોમાંના એકેક સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી.)

સાધ્ય—△अबक=△डईफ.

સિદ્ધતા—∠अ+∠ब+∠क = ૨ કાટખુણા, (પ્ર. ૮)

∠ड+∠ई+∠फ = ૨ કાટખુણા, „

∴ ∠अ+∠ब+∠क=∠ड+∠ई+∠फ.

પણ ∠ब+∠क=∠ई+∠फ. (પક્ષ)

∴ શેષ ∠अ=શેષ ∠ड.

હવે अबक અને डईफ ત્રિકોણોમાં—

∵ ∠अ=∠ड,

∠ब=∠ई

અને अब = डई;

∴ △ अबक=△ डईफ. (પ્ર. ૧૧. પ્રકાર ૧)

૧૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. બે કાટખુણ ત્રિકોણ પૈકી એકનો કર્ણ અને એક સાંકડો

ખુણો બીજા ત્રિકોણના એજ અવયવોની બરાબર હોય તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

૨. * જો ત્રિકોણના એક ખુણાને દુભાગનારી લીટી સામી બાજુ પર લંબ હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૩. એકરૂપ ત્રિકોણોના સરખા ખુણાનાં શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૪. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक**; તો **ब** અને **क** ખુણામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે, એ (સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ધર્મોનો ઉપયોગ કર્યા વગર) સિદ્ધ કરો.

૫. * **अबक** ત્રિકોણમાં $\angle$**ब**=$\angle$**क**; તો **ब** અને **क** શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ ખુણાના ભુજોથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. * **अबक** ત્રિકોણના **ब** અને **क** ખુણાને દુભાગનારી **बम** અને **कम** લીટીઓ **म** બિંદુમાં મળે છે. **बक**, **कअ**, **अब** પર અનુક્રમે **मय**, **मर**, **मल** લંબ દોરેલા છે; તો **मय** = **मर** = **मल** એ સિદ્ધ કરો.

૮. **ग** અને **ह** એક બીજીને છેદનારી લીટીઓ છે, અને **य** એક ત્રીજી લીટી છે. **य**માં એવાં બે બિંદુઓ શોધી કાઢો, કે તે **ग** અને **ह**થી સરખે અંતરે હોય. આ વાત ક્યારે અશક્ય હોય છે?

૯. **पबरस** ચતુષ્કોણનો **पर** કર્ણ $\angle$**प** અને $\angle$**र**ને દુભાગે છે; તો $\triangle$**पबर** = **पसर** એ સિદ્ધ કરો.

*૧૦. બે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેનું **अब** લંબાંતર **क**માં દુભાગેલું છે. **क** બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે, અને તે સમાંતર લીટીઓને **प** અને **ब** બિંદુઓમાં મળતાં સુધી વધારેલી છે; તો **कप**=**कब** એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે, અને **बड** પર **अई** અને

कफ લંબ દોરેલા છે. હવે જો **अई**, **कफ** બરાબર હોય, તો **बड**, **अक**ને દુભાગે છે એ બતાવી આપો.

૧૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

૧૪. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે, અને **अक** કર્ણ ∠**अ**, ∠**क**ને દુભાગે છે; તો **अक**, બીજા કર્ણ **बड**ની સાથે કાટખુણો કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૫. **अब** લીટીનું **क** મધ્યબિંદુ છે, અને આ બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે; તો **अ** અને **ब**માંથી આ લીટી પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૬. **अब** લીટી પર **अ** અને **ब** છેડા આગળ વિરૂદ્ધ દિશાઓમાં લંબો દોરેલા છે; અને **अब**ના મધ્યબિંદુ **क**માં થઈને જનારી લીટી તે લંબોને અનુક્રમે **ड** અને **ई**માં મળે છે, તો **अड=बई**, અને **कड=कई** એ સિદ્ધ કરો.

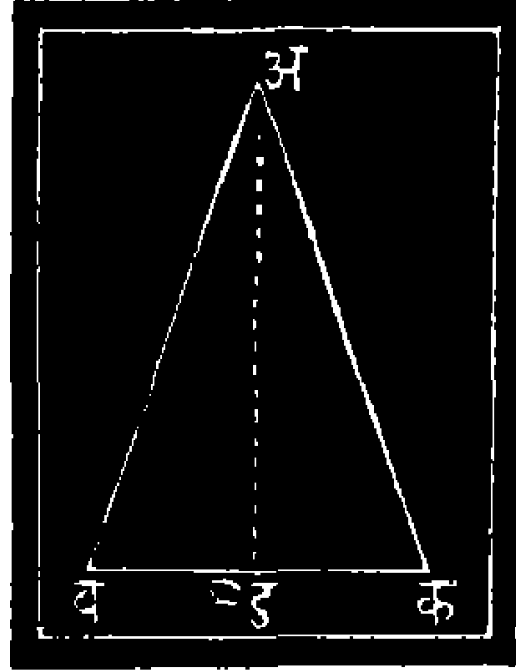
૧૭. એક વર્તુળની **कअ** અને **कब** ત્રિજ્યાઓ એક બીજી પર લંબ છે. **अम** અને **बन** તે વર્તુળના કોઈ પણ વ્યાસ પર દોરેલા લંબ છે; તો **अम=कन** અને **बन=कम** એમ બતાવી આપો.

૧૮. **अबकड** ચતુષ્કોણના **अ,ब,क,ड** ખુણા અનુક્રમે **ईफगह** ચતુષ્કોણના **ई,फ,ग,ह** ખુણાની બરાબર છે; **अब**, **कड** અનુક્રમે **ईफ**, **गह**ની બરાબર છે; અને **अड**, **बक** લીટીઓ એવી છે કે તે વધારી હોય તો મળે; તો આ ચતુષ્કોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૧૯. **अबक** ત્રિકોણનાં **अ,ब,क**, શિરોબિંદુઓમાંથી અનુક્રમે **बक**, **कअ**, **अब** બાજુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરેલી છે. આ લીટીઓ **ड,ई,फ** બિંદુઓમાં મળે છે; તો એમ બતાવો, કે **डईफ** ત્રિકોણની બાજુઓનાં **अ,ब,क** મધ્ય બિંદુઓ છે.

પ્રમેય ૧૨.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો તે બાજુઓની સામેના ખુણા પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—अबक ત્રિકોણ છે, અને તેમાં अब=अक.

સાધ્ય—$\angle$क=$\angle$ब.

રચના—$\angle$बअकને દુભાગનારી अड દોરો. ધારો કે તે डમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

∵ अबड અને अकड ત્રિકોણોમાં—

अब=अक, (પક્ષ)

अड બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે,

$\angle$बअड=$\angle$कअड; (રચના)

∴ $\triangle$अबड $\equiv$ $\triangle$अकड. (પ્ર-૧૦)

∴ $\angle$क=$\angle$ब.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ હોય છે, અને (૩) ત્રિકોણને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો ૬૦° હોય છે.

૧૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓ પાયા તરફ વધારી હોય તો તેથી થતા બહારના ખુણા સરખા હોય છે.

૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ પાસેનો બહારનો ખુણો પાયા આગળના દરેક ખુણાથી બમણો હોય છે.

૩. **अबक** અને **डबक** આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ એકજ પાયા **बक** પર છે, અને પહેલો ત્રિકોણ બીજાની અંદર છે; તો ∠**अबड**=∠**अकड** એ સિદ્ધ કરો.

૪. ઉપલા પ્રશ્નમાંના ત્રિકોણો **बक**ની સામસામી બાજુએ છે એમ ધારીને તેનો જવાબ આપો.

૫. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી પાયા પર લંબ હોય છે, એ ક્રમવિરુદ્ધ+સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૬. * ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય તો સામસામા ખુણા સરખા હોય છે.

૭. * ત્રિકોણની મધ્યગા પાયાથી અર્ધી હોય તો તે ત્રિકોણ કાટખુણ ત્રિકોણ હોય છે

૮. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને દુભાગે છે.

૯. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્ય બિંદુમાંથી સરખી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૦ * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામીબાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૧. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

+ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા—આનો અર્થ ૧૫૪મા પાના પર આપ્યો છે.

૧૩. સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ સરખી હોય છે.

૧૪. *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળતાં સુધી વધારી હોય તો તે સરખી હોય છે.

૧૫. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓને વધારી તેમને મળતાં સુધી પાયાના છેડામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબ વધાર્યા હોય તો તે સરખા થાય છે.

૧૬. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक**; ∠**अ** અને ∠**क**ને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે; તો **मब**, ∠**ब**ને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

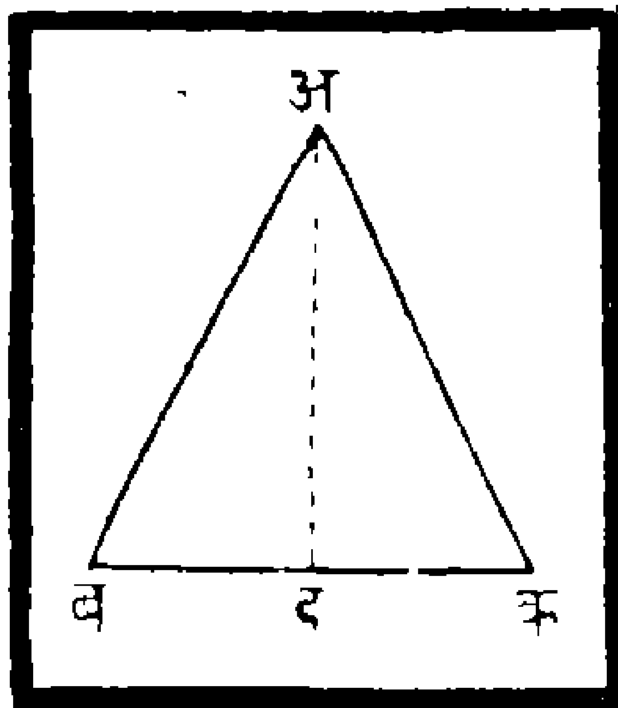
૧૭ * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૮. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓ પર **बअड**, **कअई** સમબાજુ ત્રિકોણ દોરેલા છે; તો **डअ**, **अई** એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૯. **अब**, એક અર્ધ વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને **प** પરિઘ પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ છે; તો **अपब** ખુણો એક કાટખુણો છે એ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૩.

ત્રિકોણના બે ખુણા સરખા હોય તો તે ખુણાઓની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.



પક્ષ—**અબક** એક ત્રિકોણ છે, તેમાં $\angle$**બ** = $\angle$**ક**.

સાધ્ય—**અક** = **અબ**.

રચના—**બઅક** ખુણાને દુભાગનારી લીટી દોરો, અને ધારો કે તે **બક**ને **ડ**માં મળે છે.

સિદ્ધતા—**અબડ** અને **અકડ** ત્રિકોણમાં—

$\angle$**બ** = $\angle$**ક**, (પક્ષ)

$\angle$**બઅડ** = $\angle$**કઅડ**, (રચના)

અડ સાધારણ છે;

∴ △**અબડ** ≡ △**અકડ**. (પ્ર. ૧૧)

∴ **અક** = **અબ**.

ઉપસિદ્ધાંત—સમકોણ ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે.

૧૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણના બે બહારના ખુણા સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ અને પાયો એ ત્રણ મળીને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કરે છે.

૩. **અબક** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં **અબ** = **અક** અને **બ** ને **ક**માંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ **ક્ષ**માં મળે છે; તો **ક્ષબ**=**ક્ષક** એ સિદ્ધ કરો.

૪. **અબક** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં **અબ** = **અક**, અને $\angle$**બ** તથા $\angle$**ક**ને દુભાગનારી લીટીઓ **મ**માં મળે છે; તો **મઅ**, $\angle$**અ**ને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી ખુણાના એક ભુજને સમાંતર એક લીટી દોરી હોય, અને તેને બીજા ભુજને મળતા સુધી વધારી હોય, તો તેથી બનેલો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૬. **અબકડ** ચતુષ્કોણમાં **અબ** = **અડ**, અને $\angle$**બ** = $\angle$**ડ**; તો **કબ** = **કડ** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. **અબક** ત્રિકોણના **બક** પાયામાં **પ**,**ય** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે $\angle$**બઅપ** = $\angle$**કઅય** છે. જો **અપ** = **અય** હોય તો **અબક** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. **અબકડ** ચતુષ્કોણના **અ** અને **બ** ખુણા પહોળા છે અને સરખા પણ છે, અને **અબ** ॥ **કડ** છે; તો **અડ** ॥ **બક** એ સિદ્ધ કરો.

૯. **અબક** ત્રિકોણમાં ∠**બ** = ∠**ક** = ૨∠**અ**, અને ∠**બ**ને દુભાગનારી લીટી **અક**ને **ડ**માં મળે છે; તો **અડ** = **બડ** = **બક** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૦. **અબક** સમબાજુ ત્રિકોણની **બક**, **કઅ**, **અબ** બાજુઓ પર અનુક્રમે **બકડ**, **કઅઈ**, **અબફ** સમબાજુ ત્રિકોણો દોર્યા છે; તો ∠**ડ**, ∠**ઈ**, ∠**ફ** એક સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. **અબક** ત્રિકોણની **અબ** અને **અક** બાજુઓમાં **ડ** અને **ઈ** બિંદુઓ એવી રીતે લો, કે **ડઈ**, **બક**ને સમાંતર થાય; અને **બડ**ની બરાબર થાય.

૧૨. **અબક** કાટખુણ ત્રિકોણના **અક** કર્ણમાં **ડ** બિંદુ એવું લીધું છે, કે ∠**ડકબ** = ∠**ડબક** છે; તો બતાવી આપો કે **ડક** = **ડબ** = **ડઅ**.

૧૩. *કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુને કર્ણના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે, એ ઉપલા પ્રશ્નને આધારે સિદ્ધ કરો.

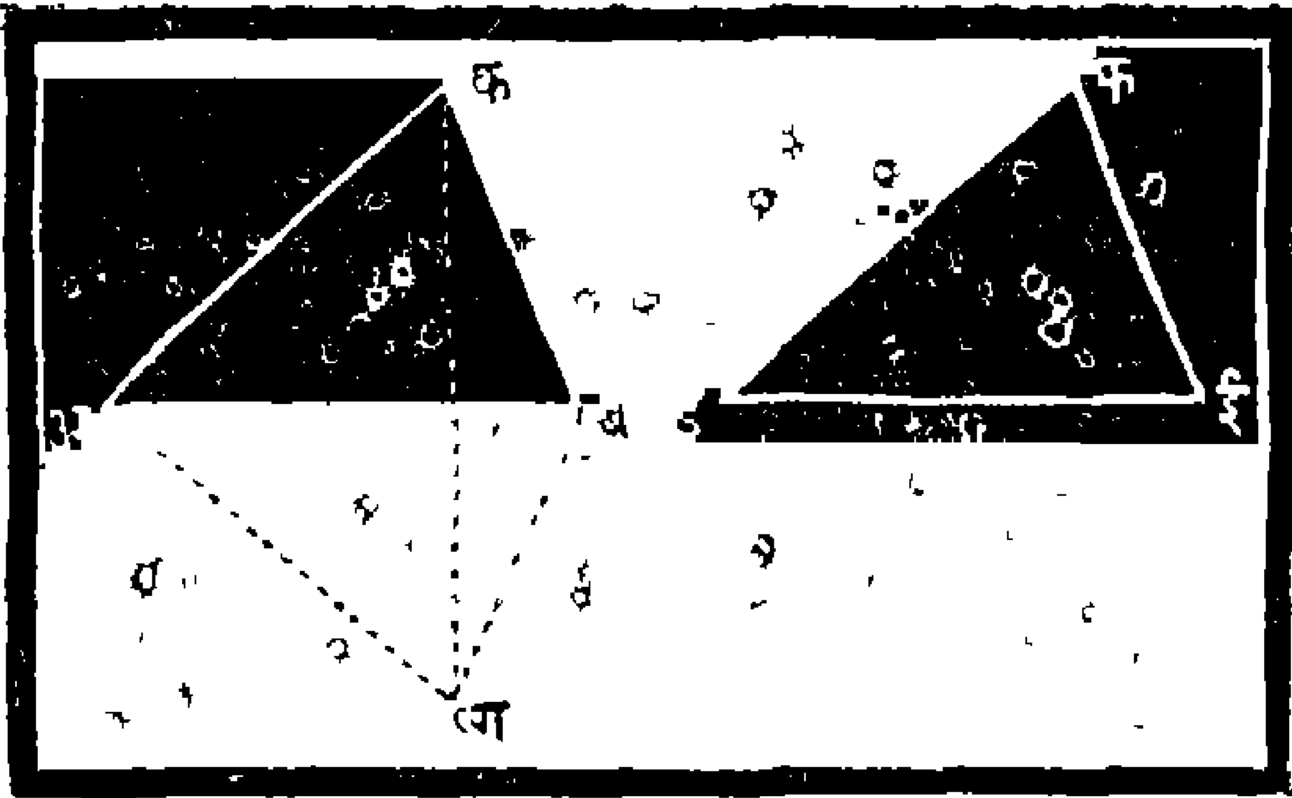
૧૪. *કોઈ પણ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી શિરોબિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગે, તો તે સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૧૫. **અબક** ત્રિકોણના **બક** પાયામાં (જરૂર પડે તો પાયો વધારીને) એવું એક બિંદુ લો, કે તેનું **અ** અને **ક**થી અંતર સરખું હોય.

• ૧૬. આપેલી લીટીમાં એક **અ** બિંદુ છે; અને તે લીટીની બહાર એક **બ** બિંદુ છે; તો આપેલી લીટીમાં એવું એક **ક** બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) **બક** અને **કઅ**નો સરવાળો એક આપેલી લીટીથી મોટો થાય; (૨) **બક** અને **કઅ**ની બાદબાકી એક આપેલી લીટી બરાબર થાય.

પ્રમેય ૧૪.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—अबक અને डईफ ત્રિકોણોમાં अब = डई, अक = डफ, बक = ईफ.

સાધ્ય—△अबक≡△डइफ

સિદ્ધતા—

ધારો કે સૌથી મોટી બાજુ अब છે.

△डईफ ઉપાડીને એવી રીતે મૂકો કે તેનું ड શિરોબિંદુ अ પર પડે, डइ પાયો अबની દિશામાં પડે, અને फ શિરોબિંદુ कथी વિરૂદ્ધ દિશામાં પડે.

∵ अब = डई, (પક્ષ)

∴ ई, ब પર પડશે.

ધારો કે फ શિરોબિંદુ ग સ્થાનમાં પડે છે.

क, ग સાંધો

હવે ∵ अक = डफ, અને डफ = अग, (પક્ષ અને રચના)

∴ अक = अग.

∴ ∠अकग = ∠अगक. (પ્ર. ૧૨)

અને ∵ बक = ईफ અને ईफ = बग, (પક્ષ અને રચના)

∴ बक = बग.

∴ ∠बकग=बगक. (પ્ર. ૧૨)

∴ ∠अकग + ∠बकग = ∠अगक + ∠बगक.

∴ ∠अकब = ∠अगब.

પણ ∠अगब એટલે ∠डफईજ છે,

∴ ∠अकब = ∠डफई.

હવે ∵ अबक અને डईफ ત્રિકોણમાં–

अक = डफ, (પક્ષ)

कब = फई (પક્ષ)

∠अकब = ∠डफई;

∴ △अबक ≡ △डईफ (પ્ર. ૧૦)

૧૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. अबकड ચતુષ્કોણમ अब = अड; कब = कड; તો अक કર્ણ ∠अ અને ∠कને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. *ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૩. अबक ત્રિકોણની अब અને अक બાજુઓ સરખી છે, અને बक પર बकड ત્રિકોણ એવો દોર્યો છે, કે बड = कड; તો अड, ∠बअकને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

૪. क्षयज्ञ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના य અને ज्ञ આ સરખા ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ ममां મળે છે, તો બતાવી આપો કે मक्ष, ∠क्षने દુભાગે છે.

૫. अब પાયાની સામસામી બાજુએ कअब અને अबड આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે कड, अबને કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. हअની એકજ બાજુએ ईहअ અને फहअ આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે ईफ વધારી હોય તો તે हअને કાટખુણે દુભાગે.

૭. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अड** = **बक** છે, અને **अक** અને **बड** કર્ણો સરખા છે, તો ∠**अकड** = ∠**बडक** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. * સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો તે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાને દુભાગે છે, અને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે.

૯. **अमब** અને **कमड** આ સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદે છે, અને **अमकई** તથા **बमडफ** એ સમબાજુ ચતુષ્કોણો છે; તો બતાવી આપો કે **ईफ** લીટી **म**માં થઈને જાય છે, અને **अक**, **बड**ને સમાંતર છે.

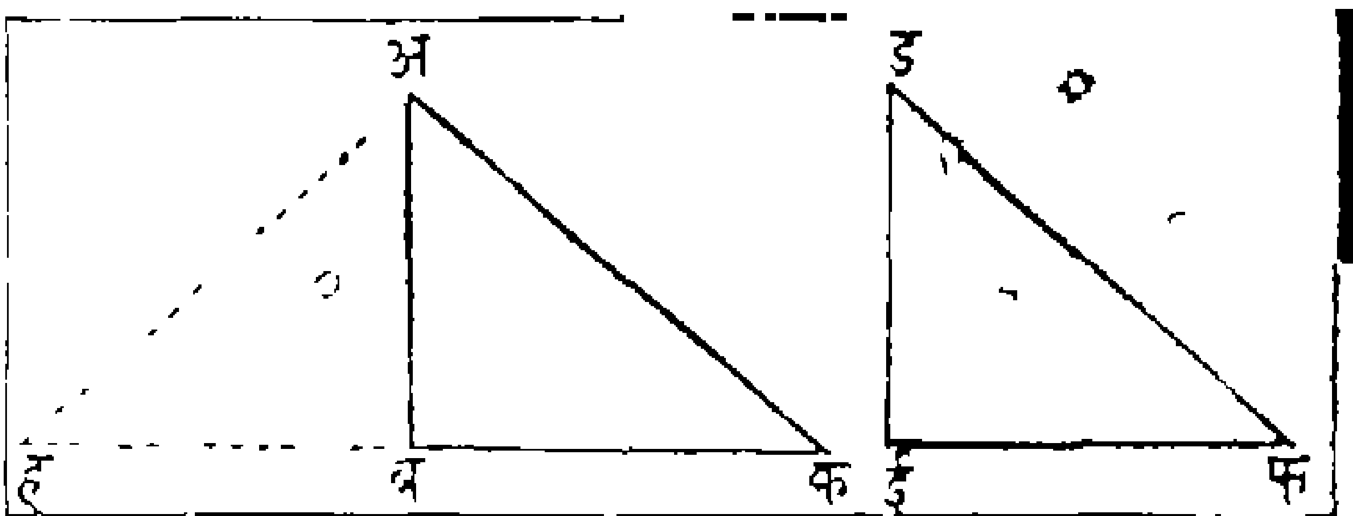
૧૦. **अबक**, **अबड** ત્રિકોણો **अब**ની એકજ બાજુએ છે. **अक** = **बड**, **अड** = **बक**, અને **अड** તથા **बक**, **म**માં મળે છે; તો **मअक** અને **मबड** ત્રિકોણો એકરૂપ છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. * ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૨. કોઈ પણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે. (ઉપલા ૧૧મા પ્રશ્ન અને ૧૧મા પ્રમેય પરના ૧૯મા પ્રશ્નને આધારે આ સિદ્ધ કરો.)

પ્રમેય ૧૫.

જો કોઈ કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ અનુક્રમે બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** બે કાટખુણ ત્રિકોણ છે; તેમના **अक** અને **डफ** કર્ણો સરખા છે, અને **अब** = **डई** છે.

સાધ્ય—△**अबक**≡△**डईफ**.

સિદ્ધતા—∵ अब = डई, (પક્ષ)

∴ △डईफ એવી રીતે મૂકી શકાય કે ड, अ પર પડે; ई, ब પર પડે; અને फ, कની વિરુદ્ધ દિશામાં પડે. ધારો કે फ, ह આગળ પડે છે.

હવે ∵ ∠अबक=૧ કાટખુણો, અને∠अबह=૧ કાટખુણો; (પક્ષ)

∴ ∠अबक+∠अबह = ૨ કાટખુણા.

∴ हबक એક સીધી લીટી છે. (પ્ર. ૨)

∵ अहक ત્રિકોણમાં अक = अह,

∴ ∠अहब = ∠अकब. (પ્ર. ૧૨)

પણ ∠अहब એટલે ∠डफईज છે,

∴ ∠अकब = ∠डफई.

હવે अबक, डईफ ત્રિકોણોમાં—

∠ब = ∠ई. (પક્ષ)

∠क = ∠फ, (ઉપર સિદ્ધ કર્યો છે.)

अब = डई; (પક્ષ)

∴ △अबक≡△डईफ. (પ્ર. ૧૧)

૧૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. *ખુણાના બને ભુજોથી સરખે અંતરે આવેલું કોઈ પણ બિંદુ તે ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં હોય છે.

૨. अबक ત્રિકોણમાં अब = अक; અને अड, बक પર લંબ છે; તો △अबड≡△अकड.

૩. જો ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી બાકીની બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

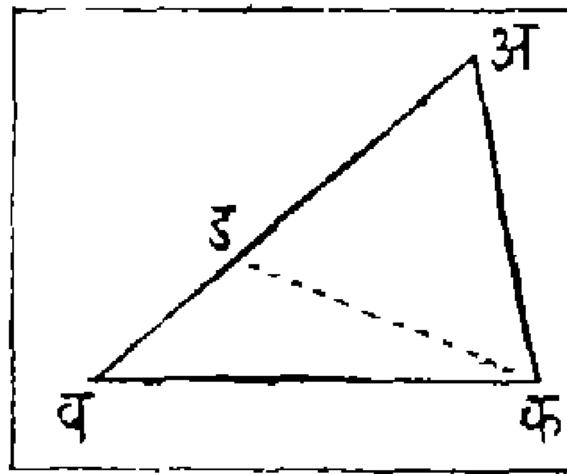
૪. * જો ત્રિકોણના બે ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫. * अबक ત્રિકોણના ब અને क ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ मમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે अम, अ ખુણાને દુભાગે છે. (એટલે ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સિદ્ધ કરો.)

૬. अबक ત્રિકોણની अब, अक બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના ખુણા ब અને कને દુભાગનારી લીટીઓ मમાં મળે છે; તો अम, ∠बअकને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૬.

જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ નાની મોટી હોય, તો મોટી બાજુની સામેનો ખુણો મોટો હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ત્રિકોણ છે, તેમાં अब > अक.

સાધ્ય—∠क > ∠ब.

રચના—अबમાંથી अक જેવડો अड કકડો કાપી કાઢો. डक સાંધો.

સિદ્ધતા—

∵ अडक ત્રિકોણમાં अड = अक, (રચના)

∴ ∠अकड = ∠अडक. (પ્ર. ૧૨)

∵ ∠अडक એ बडक ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો છે

∴ ∠अडक > ∠ब. (પ્ર. ૮, ઉપ. ૩)

પણ ∠अडक = ∠अकड,

∴ ∠अकड > ∠ब.

અને ∵ ∠क > ∠अकड,

∴ ∠क > ∠ब.

૧૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

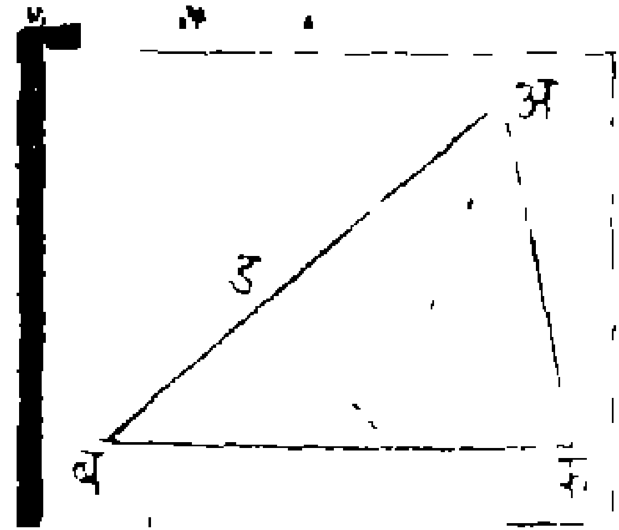
૧. ૧૬મા પ્રમેયની આકૃતિમાં (૧) कड, ∠अને દુભાગનારી લીટી પર લંબ છે; (૨) ∠डकब = $\frac{1}{2}$ (∠क − ∠ब); અને (૩) ∠अकड = $\frac{1}{2}$ (∠ब + ∠क); એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

૨. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં **अब** > **अड**; તો ∠**अडब** > ∠**बडक** એ સિદ્ધ કરો.

૩. એક ચતુષ્કોણની **अब**, **बक**, **कड**, **डअ** બાજુઓ જો અનુક્રમે નાની થતી જાય તો ∠**कडअ** > ∠**कबअ**, એ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની પાસેના ખુણા હંમેશ સાંકડા હોય છે.

૫. **अबकड** ચતુષ્કોણની સૌથી નાની બાજુ **अब** છે, અને **कड** સૌથી મોટી છે; તો ∠**ब** > ∠**ड** અને ∠**अ** > ∠**क** છે. એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

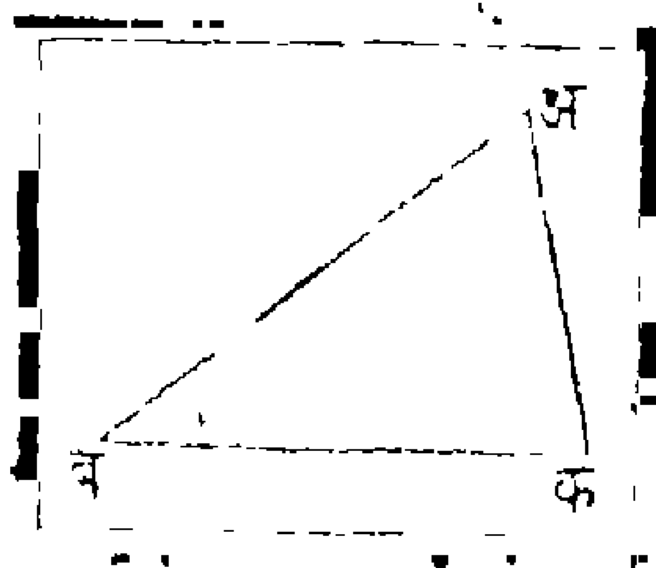


૬. પાસેની આકૃતિમાં આપેલા **अबक** ત્રિકોણનો **अ** ખુણો દુભાગો અને **अक**ની બરાબર **अड** ભાગ કાપી કાઢો; અને એ આકૃતિની મદદથી ૧૬મું પ્રમેય સિદ્ધ કરો.

૭. ત્રિકોણની એક બાજુ બીજીથી મોટી હોય તો ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી, ત્રિકોણની મોટી બાજુ અને પાયાની સામેનો ખુણો દુભાગનારી લીટી એ બેની વચ્ચ હોય છે.

પ્રમેય ૧૭.

ત્રિકોણના બે ખુણા નાના મોટા હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ (નાના ખુણાની સામેની બાજુ કરતાં) મોટી હોય છે.



પક્ષ—અબક ત્રિકોણમાં $\angle$**ક** > $\angle$**બ**.

સાધ્ય—અબ > **અક**.

સિદ્ધતા—

જો **અબ**, **અક**થી મોટી ન હોય, તો તે **અક**ની બરાબર કે તેથી નાની હોવી જોઈએ.

બરાબર હોય તો $\angle$**બ**=$\angle$**ક**. (પ્ર. ૧૨)

નાની હોય તો $\angle$**ક**<$\angle$**બ**. (પ્ર. ૧૬)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષની વિરૂદ્ધ છે;

∴ **અબ**>**અક**.

ઉપસિદ્ધાંત—ત્રિકોણમાંના સૌથી મોટા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે, અને સૌથી નાના ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી નાની હોય છે.

ઉપલા પ્રમેયની સિદ્ધતા એ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાનું ઉદાહરણ છે.

પ્રમેયના સાધ્યમાંની બાબત ખોટી છે એમ ધારવાથી પક્ષ સાથે અથવા પહેલાં સિદ્ધ કરેલી બાબતો સાથે વિરોધ આવે છે, એમ બતાવવું તેને **ક્રમવિરૂદ્ધ સિદ્ધતા** કહે છે.

ઉપલા પ્રમેયની ક્રમિક સિદ્ધતા નીચેની રચના કરીને આપી શકાય છેઃ—

અબને છેદનારી **કક્ષ** લીટી એવી દોરો, કે $\angle$**બકક્ષ** = ½ ($\angle$**ક**-$\angle$**બ**) થાય.

પછી **અક્ષ**=**અક** છે એમ બતાવી આપો.

૧૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ સર્વ બાજુઓથી મોટો હોય છે.

૨. * પહોળખુણ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે.

૩. **અબક** ત્રિકોણના પાયાની સામેના **અ** શિરોબિંદુમાંથી **બક** પર **અડ** લંબ દોર્યો હોય, તો બતાવી આપો કે **અબ**> **બડ**, અને **અક**> **કડ** છે; અને આ પરથી (**અબ**+**અક**)> **બક** છે એમ પણ બતાવી આપો.

૪. **અબક** ત્રિકોણના **બ** અને **ક** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **ડ**માં મળે છે, અને **અબ**> **અક**; **ડબ**> **ડક** એ સિદ્ધ કરો.

૫. **અબક** ત્રિકોણનાં **બ** અને **ક** શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબો **क्ष** બિંદુમાં મળે છે. હવે જો **અબ** > **અક** હોય, તો **क्षब** > **क्षक** એમ બતાવી આપો.

૬. ત્રિકોણની **અબ, અક** બાજુઓ વધારવાથી થતા બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ **ई** બિંદુમાં મળે છે. હવે જો **અબ** > **અક**, તો **ईब** < **ईक** એ સિદ્ધ કરો.

૭. **અબક** ત્રિકોણની **અબ, અક** સરખી બાજુઓ છે; અને તેમને એક લીટી **क्ष** અને **य** બિંદુઓમાં છેદે છે. **બક** પાયાને **ક** તરફ વધાર્યો હોય, તો તેને પણ તે લીટી મળે છે; તો બતાવો કે **અય** > **અक्ष**.

૮. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો વધારીને તેમાંના કોઈ પણ બિંદુ સુધી પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી મોટી હોય છે.

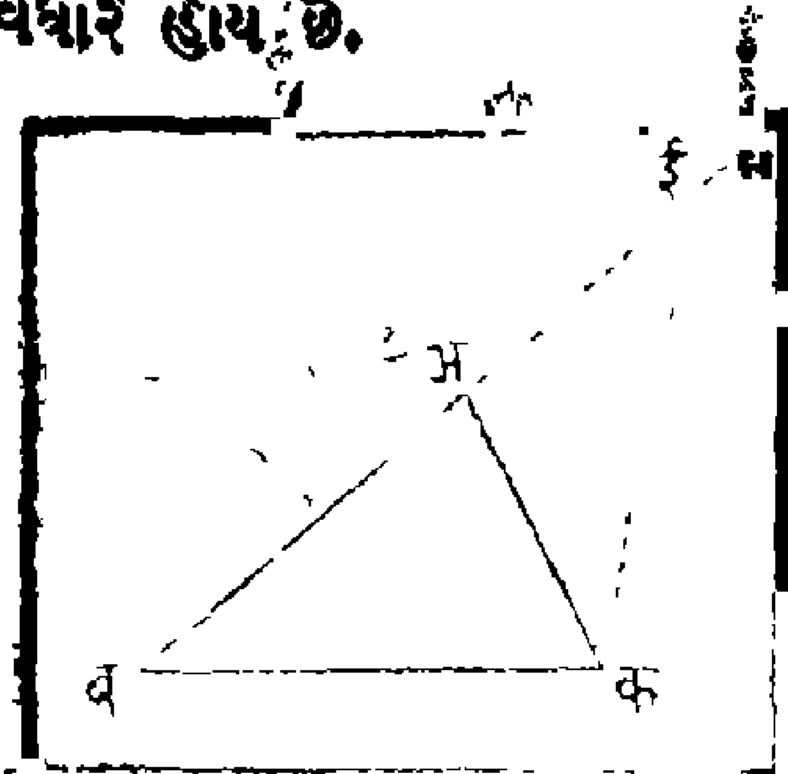
૯. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી નાની હોય છે.

૧૦. * ત્રિકોણના કોઈ પણ ખુણાને દુભાગનારી લીટીથી સામી બાજુના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંનો દરેક ભાગ તેની પાસેની ત્રિકોણની બાજુથી નાનો હોય છે.

૧૧. * આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર ફક્ત બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

પ્રમેય ૧૮.

ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—(૧) (**बअ+अक**) > **बक**;

(૨) (**कब+बअ**) > **कअ**; અને

(૩) (**अक+कब**) > **अब**.

રચના—बअને **ड** સુધી વધારો. **अड**માંથી **अक** જેવડો **अई** કકડો કાપી કાઢો. **कई** સાંધો.

સિદ્ધતા—

∵ **अईक** ત્રિકોણમાં **अई=अक**, (રચના)

∴ ∠**अकई**=∠**अईक** (પ્ર. ૧૨)

પણ ∠**बकई**> ∠**अकई**,

∴ ∠**बकई**> ∠**अईक**.

હવે **ईबक** ત્રિકોણમાં ∵ ∠**बकई**> **बईक**,

∴ **बई**> ∠**बक**. (પ્ર. ૧૭)

એટલે (**बअ+अई**) > **बक**.

પણ **अई** = **अक**, (રચના)

∴ (**बअ+अक**)> **बक**.

એજ રીતે (**कब+बअ**)>**कअ**, અને (**अक+कब**)>**अब**, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુથી ઓછી હોય છે.

સિદ્ધતા—

(**अब+अक**)>**बक**. (પ્ર. ૧૮)

દરેક બાજુમાંથી **अक** બાદ કરો.

∴ **अब**> (**बक-अक**).

૧૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अ** ખુણો દુભાગીને ૧૮મું પ્રમેય સિદ્ધ કરો.

૨. ચતુષ્કોણની કોઈ પણ ત્રણ બાજુનો સરવાળો ચોથી બાજુથી વધારે હોય છે.

૩. બહુકોણની કોઈ પણ એક બાજુ બાકીની બધી બાજુઓના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય છે.

૪. * ચતુષ્કોણના કર્ણોનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૫. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૬. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી બહુકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો તે બહુકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૭. **અબક** ત્રિકોણમાં **ડ** બિંદુ એવું લીધું છે, કે **અડ**=**અબ** છે; **બઅડ** ખુણાને દુભાગનારી લીટી **બક**ને **ઈ**માં મળે છે; તો **બઈ**=**ઈડ** છે એમ બતાવી આપો, અને તે ઉપરથી **અક**>**કડ** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. **અબક** ત્રિકોણની **અક** બાજુમાં ગમે ત્યાં એક **ડ** બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **બઅ+અક**> **બડ+ડક**.

૯. **અબક** ત્રિકોણમાં ગમે ત્યાં એક **ડ** બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **બઅ+અક**> **બડ+ડક**.

૧૦. * વર્તુળની કોઈ પણ જ્યા વ્યાસથી નાની હોય છે.

૧૧. **અક** પાયા પર **અબક** ત્રિકોણ અને **અપચક** ચતુષ્કોણ છે; **પ**, **ચ** બિંદુઓ ત્રિકોણની અંદર છે; તો ત્રિકોણની પરિમિતિ ચતુષ્કોણની પરિમિતિથી મોટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા અને પાયાનું અર્ધ એ બેનો સરવાળો, પાયાની સામેનો ખુણો કરનારી બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૩. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો, તે બે બાજુઓના મેલનબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગાની બમણાઈ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણ મધ્યગાઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૧૫. * કોઈપણ ત્રિકોણની પરિમિતિ ત્રણે મધ્યગાઓના સરવાળાની બમણાઈ કરતાં ઓછી હોય છે.

૧૬. **અબકડ** ચતુષ્કોણની અંદર **મ** એક બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે (**મઅ+મબ+મક+મડ**)>(**અક+બડ**).

૧૭. * ત્રિકોણમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓનો સરવાળો (૧) ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે, પણ (૨) પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે, એમ બતાવી આપો.

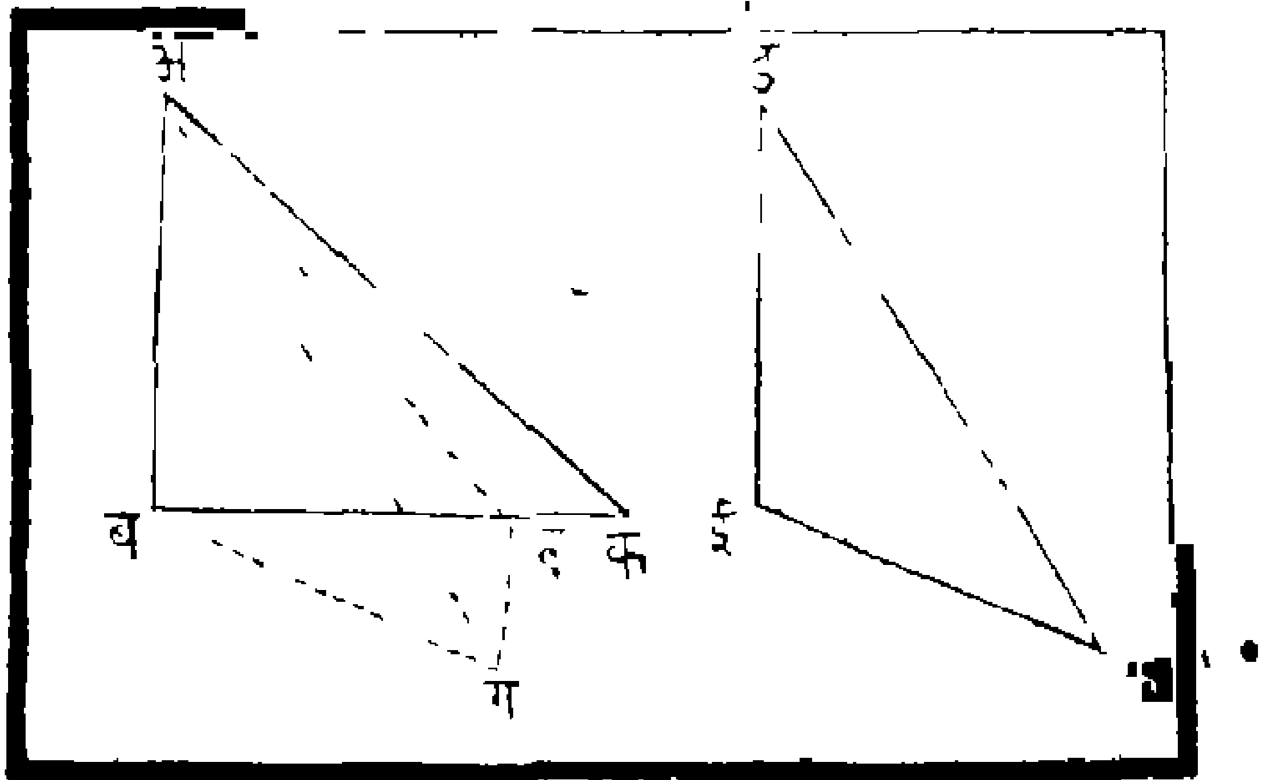
૧૮. ચતુષ્કોણના કર્ણોનો સરવાળો ચતુષ્કોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૯. **अबक** ત્રિકોણમાં **बक**નું મધ્યબિંદુ **ड** છે. જો **अड** <**बड**, તો ∠**अ** પહોળો ખુણો છે એ બતાવી આપો.

૨૦. જો એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર પુરેપુરી રીતે મૂકી શકાતો હોય, તો પહેલાની પરિમિતિ બીજાની પરિમિતિ કરતાં ઓછી હોય છે.

પ્રમેય ૧૯.

બે ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ તે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા નાના મોટા હોય; તો જે ત્રિકોણમાંનો ખુણો મોટો હોય, તે ત્રિકોણનો પાયો નાના ખુણાવાળા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મોટો હોય છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** એ બે ત્રિકોણમાં **अब**=**डई**, **अक**=**डफ**, અને ∠**अ** > ∠**ड**.

સાધ્ય—**बक**>**ईफ**.

સિદ્ધતા—

∵ डई=अब,

∴ डई, अब પર બરાબર આવી રહેશે.

डईफ ત્રિકોણ એવી રીતે મૂકો, કે ड અને ई બિંદુઓ अ અને ब પર પડે; અને अबની જે બાજુએ क શિરોબિંદુ છે તેજ બાજુએ फ શિરોબિંદુ પડે. ધારો કે फ, ग આગળ પડે છે.

હવે ∵ ∠बअक > ∠बअग, (પક્ષ)

∴ अग (डफ), अब અને अकની વચ્ચે પડે છે.

∠बअकમાંથી ∠बअग (∠ईडफ) બાદ જતાં બાકી રહેલા ∠कअगને દુભાગો, અને દુભાગનારી લીટીને ह બિંદુમાં बकને મળવા દો. हग સાંધો.

∵ अगह અને अकह ત્રિકોણોમાં—

अग=अक. (પક્ષ)

अह બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે.

અને ∠गअह=∠कअह; (રચના)

∴ એ ત્રિકોણ એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ हग=हक.

આ દરેકમાં बह ઉમેરો.

∴ बह+हग=बह+हक (એટલે बकની બરાબર.)

હવે बहग ત્રિકોણમાં—

∵ बह+हग>बग, (પ્ર. ૧૮)

અને बह+हग=बक;

∴ बक>बग.

પણ बग એટલે ईफज;

∴ बक>ईफ.

૧૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

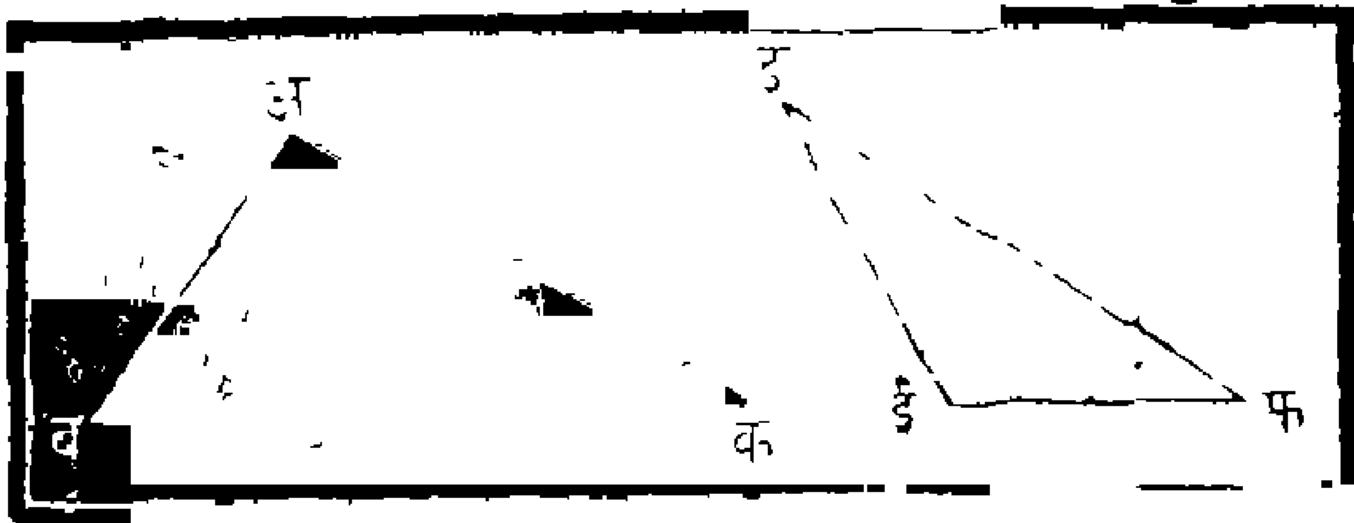
૧. अबकड એક ચતુષ્કોણ છે, તેમાં अड=बक, અને ∠अडक> ∠बकड; તો બતાવી આપો કે अक>बड.

૨. **अबक** ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓને અનુક્રમે **ड** અને **ई** સુધી વધારીને **बड=कई** કરેલી છે. હવે જો **अब>अक** હોય, તો બતાવો કે **कड>बई.**

૩. **अबक** ત્રિકોણની **बअ** અને **कअ** બાજુઓને વધારીને **बड** અને **कई** સરખી કરી છે. હવે જો **अब>अक** હોય, તો બતાવી આપો કે **बई>कड.**

પ્રમેય ૨૦.

બે ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પરંતુ તેમના પાયા નાના મોટા હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો હોય તેનો તે પાયાની સામેનો ખુણો, જેનો પાયો નાનો છે તેના પાયાની સામેના ખુણા કરતાં મોટો છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** ત્રિકોણોમાં **अब=डई, अब=डफ,** અને **बक>ईफ.**

સાધ્ય—$\angle$**अ**$>\angle$**ड.**

સિદ્ધતા—

જો $\angle$**अ**$>\angle$**ड** ન હોય, તો $\angle$**अ**$=\angle$**ड** હોવો જોઈએ, અથવા $\angle$**अ**$<\angle$**ड** હોવો જોઈએ.

હવે $\angle$**अ**$=\angle$**ड** હોય, તો

बक = ईफ; (પ્ર. ૧૦)

અને $\angle$**अ**$<\angle$**ड** હોય, તો

बक < ईफ. (પ્ર. ૧૯)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષથી વિરુદ્ધ છે,

એટલે ∠**અ**; ∠**ડ**ની બરાબર પણ નથી અને તેથી નાનો પણ નથી.

∴∠**અ**>∠**ડ**.

૨૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **અબક** ત્રિકોણમાં **અબ**> **અક**; **બક**, **ડ**માં દુભાગેલી છે; તો **અડક** સાંકડો ખુણો છે એમ બતાવી આપો.

૨. **અબક** ત્રિકોણની **બક** બાજુનું **ડ** મધ્યબિંદુ છે. **અડ**માં ગમે ત્યાં **ઈ** બિંદુ લીધેલું છે; તો એમ બતાવો કે જો **અબ**>**અક** હોય, તો **ઈબ**>**ઈક** છે.

૩. **અબક** ત્રિકોણની **બઅ**, **કઅ** બાજુઓમાંથી **બડ**, **કઈ** સરખા કકડા કાપી કાઢ્યા છે. હવે જો **બઈ**>**કડ** હોય, તો **અબ**>**અક** છે એમ બતાવી આપો.

૪. **અબકડ** ચતુષ્કોણમાં **અડ**=**બક**. હવે એમ બતાવી આપો કે જો

(૧) **અક**>**બડ** હોય, તો ∠**અડક**> ∠**બકડ**;

(૨) **અબ** <**કડ** હોય, તો ∠**અકબ**<∠**ડઅક**;

(૩) ∠**અડક**>∠**બકડ** હોય, તો ∠**અબક**> ∠**બઅડ**.

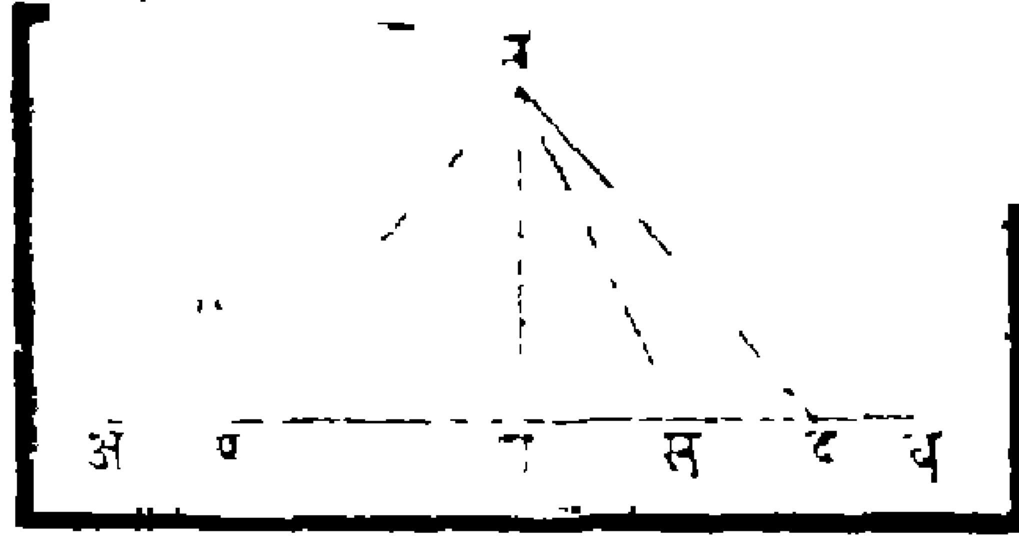
પ્રમેય ૨૧.

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી તે લીટી પર જે લીટીઓ દોરી શકાય તે પૈકી—

(૧) લંબ સૌથી નાની હોય છે,

(૨) લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે, અને

(૩) લંબની સાથે મોટો ખુણો કરનારી લીટી, નાનો ખુણો કરનારી લીટી કરતાં મોટી હોય છે.



પક્ષ—**અબ** આપેલી લીટી છે. તે લીટીની બહાર **મ** આપેલું બિંદુ છે.

(૧) **મન**, **અબ** પર લંબ છે; અને **મપ**, **અબ**ને **પ**માં મળનારી લીટી છે. (૨) ∠**નમપ**=∠**નમદ**. (૩) ∠**નમપ**> **નમસ**.

સાધ્ય—(૧) **મન** સૌથી નાની લીટી છે.

સિદ્ધતા—

∵ **મપન** ત્રિકોણની **પન** બાજુ **બ** સુધી વધારી છે,

∴ ∠**મનબ**> ∠**મપન**. (પ્ર. ૮, ઉ. સિ. ૩)

અને ∠**મનબ**=૧ કાટખુણો (અને તેટલા માટે)= ∠**મનપ**,

∴ ∠**મનપ**> ∠**મપન**.

∴ **મપ**> **મન**. (પ્ર. ૧૭)

એજ રીતે **મ**માંથી **અબ** સુધી દોરેલી બીજી કોઈ પણ લીટી કરતાં **મન** નાની છે એમ સિદ્ધ કરી શકાશે.

સાધ્ય—(૨) **મપ** = **મદ**.

સિદ્ધતા—

∵ **મપન**, **મદન** ત્રિકોણોમાં—

∠**મનપ**=∠**મનદ**, ⎫
∠**નમપ**=∠**નમદ**, ⎭ (પક્ષ)

મન બાજુ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

∴ **મપ** = **મદ**. (પ્ર. ૧૧)

સાધ્ય—(૩) **મપ**>**મસ**.

સિદ્ધતા—

∵ **મદસ** ત્રિકોણની **દસ** બાજુ **પ** સુધી વધારી છે,

∴ ∠**મસપ** > ∠**મદપ.** (પ્ર. ૮, ઉ. ૩).

અને ∵ **મપ = મદ,**

∴ ∠**મદપ**=∠**મપદ** (=∠**મપસ.**) (પ્ર. ૧૨).

∴ ∠**મસપ** > ∠**મપસ.**

∴ **મપ** > **મસ.**

ઉપસિદ્ધાંત ૧—લીટીની બહારના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—કોઈ પણ બિંદુમાંથી કોઈ પણ લીટી સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે પૈકી સૌથી નાની લીટી તે લીટી પર લંબ હોય છે.

૨૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એક બાજુની સામેનો ખુણો-એટલા અવયવો બીજા ત્રિકોણના એમને મળતા અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે; અથવા તે ત્રિકોણોની સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં એમ બતાવી આપો, કે આપેલા સરખા ખુણા પહોળા હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

પ્રમેય ૨૨.

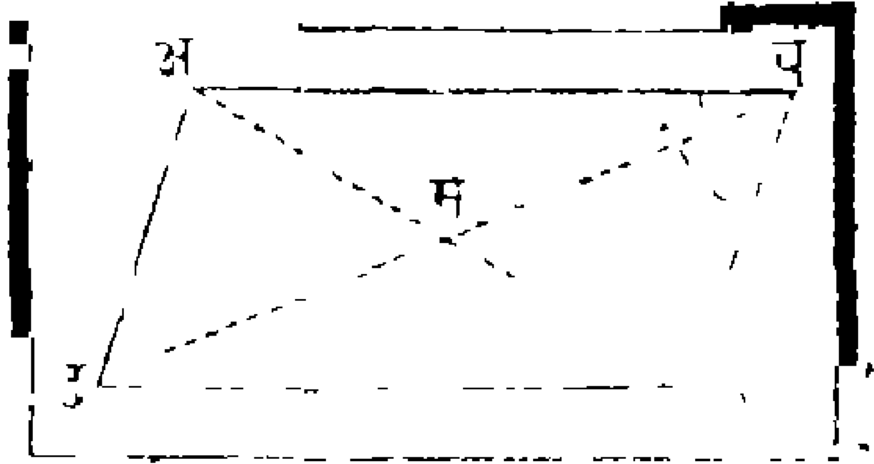
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

(૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;

(૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;

(૩) દરેક કર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે; અને

(૪) બંને કર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.



પક્ષ—**अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. **अक**, **बड** તેના કર્ણ છે.

સાધ્ય—(૧) ∠**अ**=∠**क**, અને ∠**ब**=∠**ड**;

(૨) **अड**=**बक** અને **अब**=**डक**;

(૩) **अक** અને **बड** કર્ણો **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે;

(૪) **अक** અને **बड** કર્ણો એક બીજાને **म**માં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(૧)

∵ **अड** ∥ **बक**, અને તેમને **बड** મળે છે,

∴ ∠**कबड**=વ્યુત્ક્રમ ∠**अडब** (પ્ર. ૬.)

તેમજ ∵ **अब** ∥ **डक**, અને **डब** તેમને મળે છે,

∴ ∠**अबड**=વ્યુત્ક્રમ ∠**कडब**. (પ્ર. ૬.)

∴ ∠**अबड**+∠**कबड**=∠**कडब**+∠**अडब**.

∴ ∠**ड**=∠**ब**.

એજ રીતે ∠**अ**=∠**क** છે એમ બતાવી શકાશે.

(૨)

∵ **अबड**, **कडब** ત્રિકોણોમાં—

∠**अडब**=∠**कबड**,

∠**अबड**=∠**कडब**,

અને **बड** બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

∴ △**अबड** ≡ △**कडब** (પ્ર. ૧૧)

∴ **अड** = **बक**, અને **अब** = **डक**.

(૩)

∵ △**अबड** ≡ △**कडब** (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

∴ **बड** કર્ણથી **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થયા છે. તેમજ △**अडक**≡△**अबक** એમ બતાવી શકાશે.

(૪)

∵ △**मअड** અને △**मकब**માં—

∠**अडम**=∠**कबम**, (પ્ર. ૬)

∠ अमड = ∠ कमब, (प्र. ३)
अड = बक;
∴ △अमड = △बमक. (प्र. ११)
∴ मअ = मक, અને મડ = મબ.

એટલે अक અને बड કર્ણો એક બીજાને ममां દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (સમાંતર) બધે ઠેકાણે સરખું હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બાકીના બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની કોઈ પણ બે બાજુઓ સરખી હોય તો સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૨૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજી સાથે કાટખુણો કરે છે.

૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણોના છેદનબિંદુમાંથી સામસામી બાજુ સુધી દોરેલી કોઈ પણ લીટીના તે બિંદુમાં સરખા ભાગ થાય છે.

૪. अबकड ચતુષ્કોણમાં बक = अड છે, પણ તેઓ સમાંતર નથી; અને अब ॥ डक છે; તો ∠ क = ∠ ड એમ બતાવી આપો.

૫. ઉપલા પ્રશ્નની આકૃતિમાં જો इ અને फ અનુક્રમે अब અને डकનાં મધ્યબિંદુ હોય, તો इफ, अब પર લંબ છે એમ બતાવી આપો.

૬. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો દરેક કર્ણ સામાં શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. એક ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ સમાંતર છે, અને બીજી બે બાજુઓ સરખી છે; તો તેમાંનો કોઈ પણ ખુણો સામા ખુણાની બરાબર છે અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક છે એમ બતાવી આપો.

૮. * જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો સરખા હોય છે તે ...રખુણુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૯. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજા પર લંબ ...ય છે, તેની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૦. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો સમાન હોઇને એક ...બીજા પર લંબ હોય તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૧. अब પાયા પર અને તેની વિરુદ્ધ બાજુએ अबकड, ...बईफ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એવા દોર્યા, કે પહેલાની अड બાજુ ...જાના अई કર્ણ બરાબર છે, અને પહેલાનો अक કર્ણ બીજાની ...फ બાજુ બરાબર છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કેઃ—

(૧) क, अ, फ બિંદુઓ } એકજ સીધી લીટીમાં છે.
...ને (૨) ड, अ, ई બિંદુઓ }

૧૨. अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના अक કર્ણમાં ई બિંદુ ...વું લીધું છે, કે ईब=ईड છે; તો ई, अकनुं મધ્યબિંદુ છે એમ ...તાવી આપો. આનો કોઈ અપવાદ હોય તો કહો.

૧૩. अबक ત્રિકોણની बक બાજુમાં ई અને फ બે બિંદુઓ ... अबમાં प બિંદુ અને अकમાં द બિંદુ કેવી રીતે લીધાં હોય, ... पद લીટી ईफની બરાબર અને તેને સમાંતર થાય?

૧૪. *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયામાંના ગમે તે બિંદુમાંથી ...રખી બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, પાયાના એક છેડામાંથી ...મી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

૧૫. સમબાજુ ત્રિકોણની અંદરના ગમે તે બિંદુમાંથી ત્રણે ...જુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, તે ત્રિકોણના કોઈ પણ ...રોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર છે.

પ્રમેય ૨૩.

કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં જો—

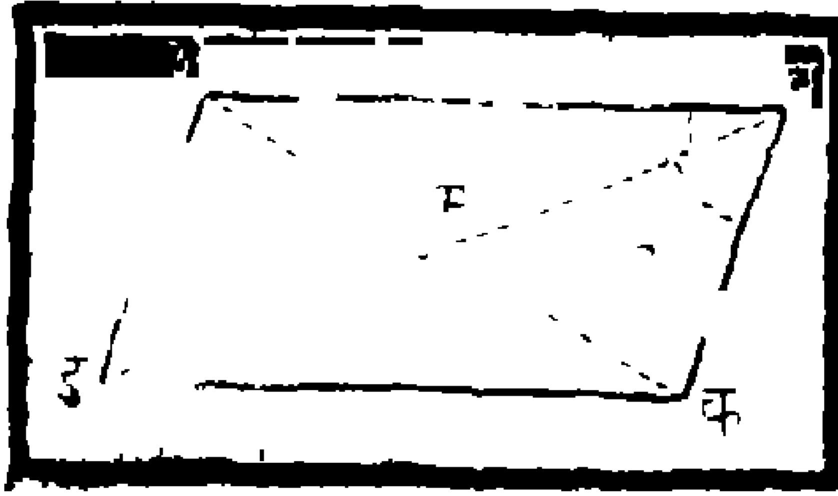
(૧) સામસામી બાજુઓ પૈકી, એક જોડમાંની બે ...ીટીઓ સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૨) સામસામી બાજુઓની દરેક જોડમાંની બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૩) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૪) કર્ણો એક બીજાને દુભાગતા હોય,

તો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ હોય છે.



(૧)

પક્ષ—अबकड ચતુષ્કોણમાં **अब**, **डक** સરખી અને સમાંતર છે.

સાધ્ય—अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

રચના—अ, क સાંધો.

સિદ્ધતા—

હવે ∵ **अब** ‖ **डक**, (પક્ષ)

અને તેમને **अक** મળે છે,

∴ ∠**बअक** = વ્યુત્ક્રમ ∠**अकड**. (પ્ર. ૬)

હવે ∴ △ **अबक**, અને △ **कडअ**માં—

अब = **कड**, (પક્ષ)

अक સાધારણ છે,

∠**बअक** = ∠**अकड**;

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ ∠**अबक** = ∠**कअड**.

અને ∵ આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે.

∴ **बक** ‖ **अड**. (પ્ર. ૪)

∴ **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૨)

પક્ષ—**अब** = **कड**, અને **बक** = **अड**.

સાધ્ય—**अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∵ △**अबक**, △**कडअ**માં—

अब = **कड**, (પક્ષ)

बक = **डअ**, „

अक સાધારણ છે;

∴ △**अबक** ≡ △**कडअ**. (પ્ર. ૧૪)

∴ ∠**बअक** = ∠**डकअ**, અને ∠**बकअ**=∠**कअड**.

∴ **अब** ॥ **डक**, અને **बक** ॥ **अड**. (પ્ર. ૪)

∴ **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૩)

પક્ષ—∠**अ** = ∠**क**, અને ∠**ब** = ∠**ड**.

સાધ્ય—**अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∵ ∠**अ** = ∠**क**, અને ∠**ब** = ∠**ड**, (પક્ષ)

∴ ∠**अ** + ∠**ब** = ∠**क** + ∠**ड**;

એટલે ∠**अ** + ∠**ब** એ સરવાળો ∠**अ** + ∠**ब** + ∠**क** + ∠**ड**નું અર્ધ છે.

અને ∵ **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે,

∴ ∠**अ** + ∠**ब** + ∠**क** + ∠**ड** = ૪ કાટખુણા.
(પ્ર. ૮, ઉ. ૬)

∴ ∠**अ** + ∠**ब** = ૨ કાટખુણા.

∴ **अड** ॥ **बक**. (પ્ર. ૫)

એજ પ્રમાણે **अब** ॥ **डक** છે એમ બતાવી શકાશે.

∴ **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૪)

પક્ષ—**અક**, **બડ** એક બીજાને **મ**માં દુભાગે છે.

સાધ્ય—**અબકડ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∵ △**અમડ** અને △**કમબ**માં-

અમ = **કમ**, (પક્ષ)

ડમ = **બમ**, ”

∠**અમડ** = ∠**કમબ**; (પ્ર. ૩)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ **અડ** = **બક**; અને

∵ ∠**અડમ** = વ્યુત્ક્રમ ∠**કબમ**,

∴ **અડ** ॥ **બક**. (પ્ર. ૪)

∴ **અબકડ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(પ્ર. ૨૩, પ્રકાર ૧)

૨૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સરખી ઉંચાઈના ત્રિકોણો અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો, સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે મૂકી શકાય છે.

૨. **અબકડ** ચતુષ્કોણમાં ∠**અ**, ∠**બ**, ∠**ડ** અનુક્રમે ૬૦°, ૧૨૦°, ૧૨૦°ના છે; તો ∠**ક** કેવડો? **અબકડ** કઈ જાતનો ચતુષ્કોણ છે?

૩. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટી બીજી બે બાજુઓને સમાંતર હોય છે.

૪. * કાટખુણ ચતુષ્કોણના કર્ણો સરખા હોય છે.

૫. * ચોરસના અને તેમજ સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે.

૬. * સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો તેના ખુણાઓને દુભાગે છે.

૭. * ચતુષ્કોણના કર્ણો સમાન હોઈને જો તે એક બીજાને

કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે.

૮. * જો ચતુષ્કોણના કર્ણો નાના મોટા હોઈને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમબાજુ હોય છે.

૯. (૧) કાટખુણ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે. (૨) સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે સમબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને પણ દુભાગે છે. (૩) ચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, તે એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે ચોરસના ખુણાને પણ દુભાગે છે.

૧૦. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને **अब**, **कड** બાજુઓ **क्ष** અને **य** બિંદુમાં દુભાગેલી છે; તો બતાવો કે **बक्षडय** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૧૧. * જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી અને એક ખુણો કાટખુણો હોય છે, તે ચોરસ હોય છે.

૧૨. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં ∠ **अ** = ∠ **ब** અને ∠ **क** = ∠ **ड** છે; તો આ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓની એક જોડમાંની બાજુઓ સરખી છે, અને બીજી જોડમાંની બાજુઓ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

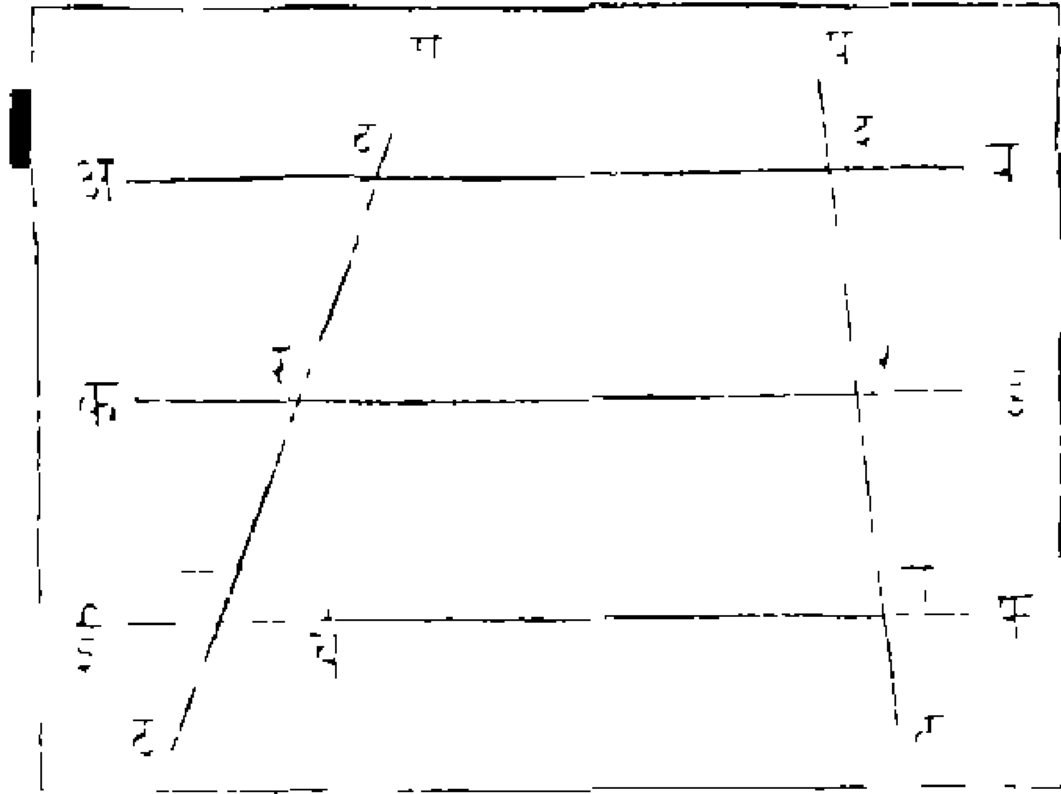
૧૩. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે; **बकडप**, **कडअद**, **डअबर**, અને **अबकस**, એ ચાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે; તો **अप**, **बद**, **कर**, **डस** સરખી અને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૧૪. જો ચતુષ્કોણના દરેક શિરોબિંદુથી બીજાં શિરોબિંદુઓ સુધીનાં અંતરોનો સરવાળો સરખો હોય, તો તે ચતુષ્કોણ કાટખુણ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૧૫. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક **म** બિંદુ છે. **मअईब**, **मबफक**, **मकगड**, **मडहअ**, આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોર્યા હોય, તો **ईफगह** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તે **अबकड**થી બમણો છે, એમ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨૪.

જો ત્રણ અથવા ત્રણથી વધારે સમાંતર સીધી લીટી-ઓને છેદનારી એક લીટીના તે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી કોઈ પણ લીટીના તેવા ગાળાઓ પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—**अब, कड, ईफ** સમાંતર સીધી લીટીઓ છે; તેમને **पट** સીધી લીટી અનુક્રમે **द, र, स**માં છેદે છે; અને **दर=रस.** બીજી કોઈ પણ **प'ट'** સીધી લીટી આ સમાંતર સીધી લીટીઓને **द', र', स'**માં છેદે છે.

સાધ્ય—**द'र' = र'स'.**

રચના—**प'ट'**ને સમાંતર **दह. रच** દોરો, અને ધારો કે તે **कड, ईफ**ને **ह** અને **च**માં મળે છે.

સિદ્ધતા—

હવે ∵ **कड ॥ ईफ,** (પક્ષ)

∴ ∠**दरह** = સંગત ∠**रसच.** (પ્ર. ૭)

∵ **दह, रच** બંને ॥ **प'ट'**

∴ **दह ॥ रच.** (પ્ર. ૭)

∵ दरस તેમને છેદે છે,

∴ ∠रदह=સંગત ∠सरच. (પ્ર. ૬)

∵ △दरह અને △रसचમાં-

∠दरह = ∠रसच,

∠रदह = ∠सरच,

दर = रस; (પક્ષ)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

∴ दह = रच.

दह ॥ द'र', અને दद' ॥ हर',

∴ दहर'द' સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

તેમજ रचस'र' પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ दह=द'र' અને रच=र'स' (પ્ર. ૨૨)

પણ दह=रच,

∴ द'र' ॥ र'स'.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જો ત્રિકોણની કોઈ બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પાયાને સમાંતર લીટી દોરી હોય, તો તે બીજી બાજુને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને (૧) સમાંતર હોય છે અને (૨) તેનાથી અર્ધી હોય છે.

૨૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓથી તે ત્રિકોણના જે ચાર ત્રિકોણ થાય છે, તે એકરૂપ હોય છે.

૨. अबक ત્રિકોણની अब અને अक બાજુઓમાં અનુક્રમે ड અને ई બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે अड=$\frac{1}{4}$ अब, અને अई=$\frac{1}{4}$ अक; તો डई, बकનો એક ચતુર્થાંશ છે અને તેને સમાંતર છે એ બતાવી આપો.

૩. * ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધવાથી બનેલી આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે, એ બતાવી આપો.

૪. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે છે.

૫. ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ, અને તેના કર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી, એક બિંદુમાં મળે છે અને તેમાંજ દુભગાય છે.

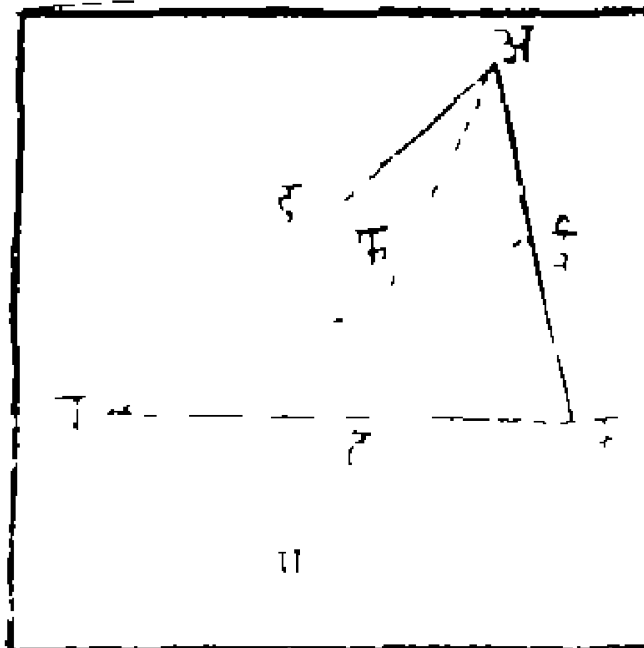
૬ * કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગા કર્ણના અર્ધ જેટલી હોય છે.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુને તેની સામી બાજુનાં શિરોબિંદુઓની સાથે સાંધનારી બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો જો કાટખુણો હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ બીજીથી બમણી હોય છે.

૮. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓનાં સ્થાન આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

પ્રમેય ૨૫.

ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુથી મધ્યગાઓના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંથી શિરોબિંદુ તરફનો ભાગ બીજા ભાગથી બમણો હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ત્રિકોણ છે, અને તેની बई અને कड મધ્યગા એક બીજીને फ બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) अह મધ્યગા फ બિંદુમાં થઈને જાય છે;

(૨) अफ=૨ फह; बफ=૨ फई; कफ=૨ फड.

સિદ્ધતા—

(૧) (अ, फ બિંદુઓમાં થઈને જનારી સીધી લીટી મધ્યગા છે એમ સિદ્ધ થાય, તો ત્રણે મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં થઈને જાય છે એ સિદ્ધ થાય.)

રચના—अ, फ સાંધો. अफ લીટીને વધારીને તેનો વધારેલો फग ભાગ अफની બરાબર કરો. बग અને कग સાંધો.

∵ △ अबगની अब અને अग બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે ड અને फ છે; (પક્ષ અને રચના)

∴ डफ, बगને સમાંતર છે અને बगના અર્ધ બરાબર છે.

(પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

એજ પ્રમાણે अकग ત્રિકોણની अग અને अक બાજુઓનાં અનુક્રમે फ અને ई મધ્યબિંદુઓ છે; (રચના અને પક્ષ)

∴ फई, गकને સમાંતર છે અને गकના અર્ધ બરાબર છે.

(પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

હવે ∵ डक ॥ बग,

અને बई ॥ गक;

∴ बगकफ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

અને ∵ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે;

∴ बक અને फगનું ह મધ્યબિંદુ છે.

હવે ∵ ह, बकનું મધ્યબિંદુ છે,

∴ अफह મધ્યગા છે, અને તે फમાં થઈને જાય છે એ સ્પષ્ટ છે.

∴ ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગા એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

(૨)

∵ **फह=हग,**

∴ **फग=२ फह.**

પણ **फग=अफ,** (રચના)

∴ **अफ=२ फह.**

એજ પ્રમાણે **बफ=२ फई**, અને **कफ=२ फड**, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

૨૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓને સાંધનારી લીટી એક કર્ણને સમાંતર હોય છે, અને આ લીટીના છેડાઓને સામા શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટીઓથી તે કર્ણના ત્રણ સરખા ભાગ થાય છે.

૨. એક સીધી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩. જો ત્રિકોણની બે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે; અને જો ત્રણે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે.

૪. ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગાનો સરવાળો પરિમિતિના ત્રણ ચતુર્થાંશ કરતાં વધારે હોય છે.



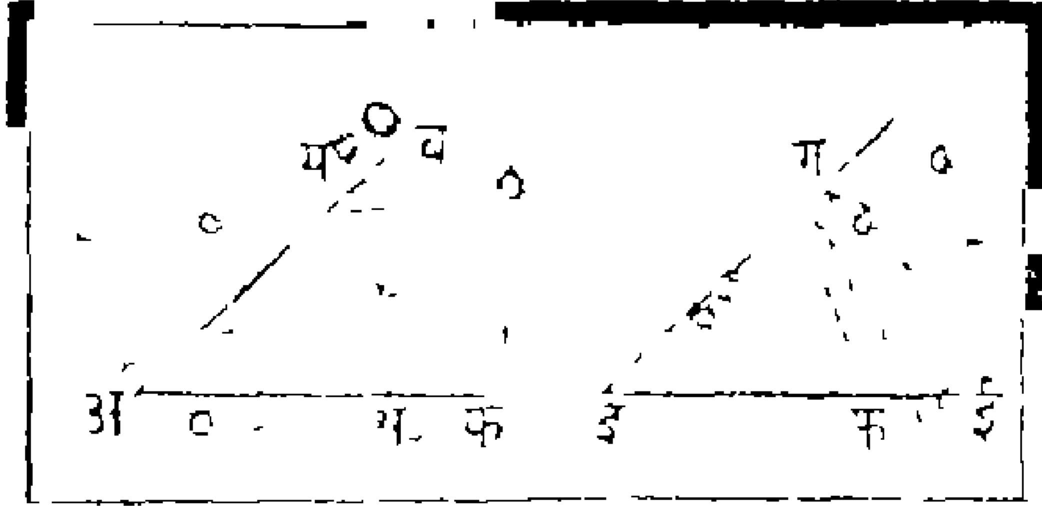
નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.

ખંડ ૩.

(કૃત્યો

કૃત્ય ૧.

આપેલી લીટીમાંના આપેલા બિંદુ આગળ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરવો.



પક્ષ—**डई** આપેલી લીટી છે. **ड** આપેલું બિંદુ છે. **बअक** આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—આપેલા ∠**बअक** જેવડો ∠**ईडग** કરવો.

રચના—**अ** મધ્યબિંદુ ધારીને ગમે તે ત્રિજ્યાએ એક કૌંસ દોરો. તેને, **अब** અને **अक**ને અનુક્રમે **य** અને **क्ष**માં છેદવા દો. **ड** મધ્યબિંદુ ધારીને પહેલાં જેટલીજ ત્રિજ્યાએ કૌંસ દોરો. તે **डई**ને અથવા **डई**ના વધારેલા ભાગને **फ**માં છેદે છે, એમ ધારો. **फ** મધ્યબિંદુ લઈને **क्षय** (સીધી લીટીની) લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાએ એક કૌંસ દોરો. તેને **फ** કૌંસને **ग**માં છેદવા દો. **डग** સાંધો.

फडग માગેલો ખુણો થશે.

સિદ્ધતા—

(**फग** અને **क्षय** સાંધો)

∵ **अक्षय**, **डफग** ત્રિકોણોમાં—

अक्ष = **डफ**, (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

अय = **डग**, ,,

क्षय = **फग**; ,,

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૪)

∴ ∠**फडग** એટલે ∠**ईडग**=∠**क्षअय**.

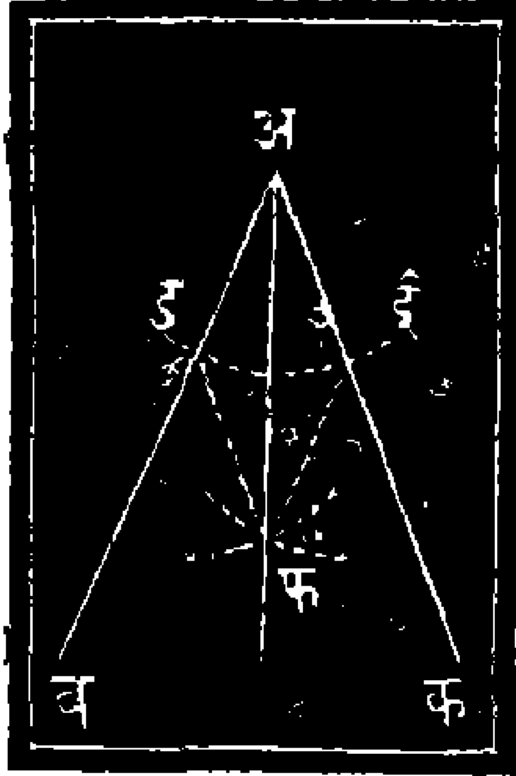
૧લા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ જેવડો ત્રિકોણ દોરો.

૨. આપેલા ચતુષ્કોણ, પંચકોણ...જેવડી આકૃતિ દોરો.
૩. આપેલા કાટખુણ ત્રિકોણના બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કરો.

કૃત્ય ૨.

આપેલા ખુણાને દુભાગો.



પક્ષ—बअक આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—बअक ખુણો દુભાગવો.

રચના—अ મધ્યબિંદુ લઈને ગમે તે ત્રિજ્યાએ, **अब** અને **अक**ને અનુક્રમે **इ** અને **ई**માં છેદે એવો કૌંસ દોરો. **इ** અને **ई** મધ્યબિંદુઓ લઈને **इई** જેટલી ત્રિજ્યાએ **फ**માં એક બીજાને છેદનારા બે કૌંસ દોરો. **अफ** સાંધો.

अफ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—

(**इफ, ईफ** સાંધો.)

∵ **अफई** અને **अफइ** ત્રિકોણોમાં

अई = **अइ**, (એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

फई = **फइ**, (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

अफ બંનેમાં સાધારણ;

∴ △**अफई** = △**अइफ**. (પ્ર. ૧૪)

∴ ∠**बअफ** = ∠**ईअफ**.

૨જા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

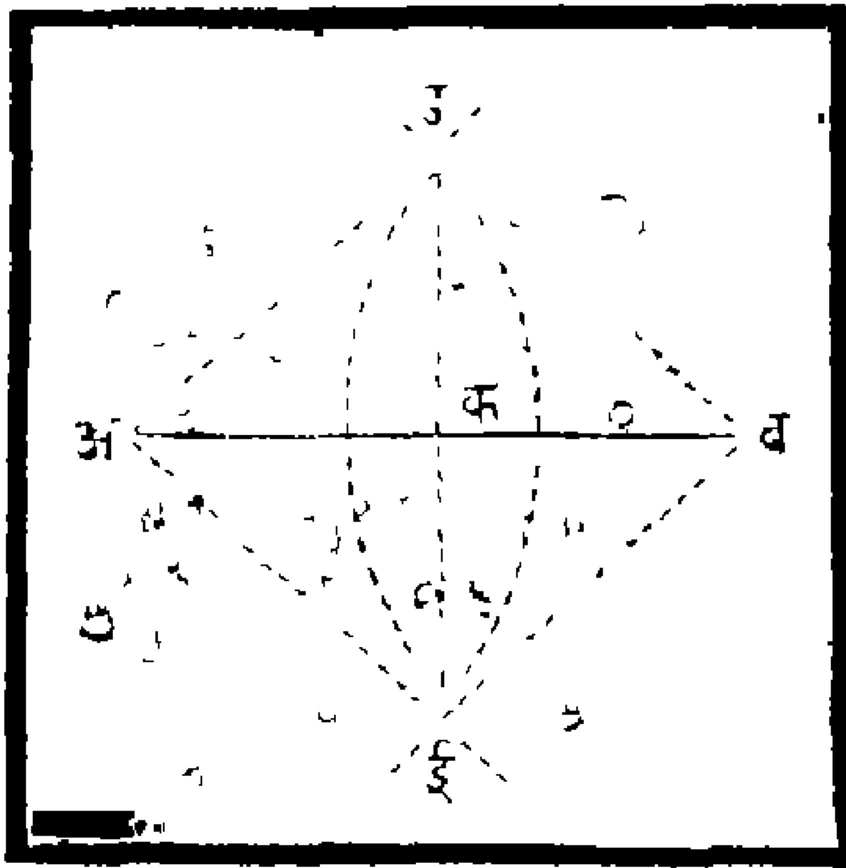
૧. આપેલા ખુણાના ૪, ૮...સરખા ભાગ કરો.

૨. આપેલા ખુણાના બે ભાગ એવા કરો, કે એક બીજાથી ત્રણગણો થાય.

૩. अबक ખુણાના बअ, बक ભુજોમાં ड અને ई બિંદુઓ એવાં લો, કે ∠बडई = ૩ ∠बईड થાય.

કૃત્ય ૩.

આપેલી લીટીને દુભાગવી.



પક્ષ—अब આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—अबના બે સરખા ભાગ કરવા.

રચના—अ, ब મધ્યબિંદુઓ લઈને ½ अबથી મોટી ત્રિજ્યાએ ड અને ईમાં એક બીજાને છેદનારા બે કાંસો દોરો. ड, ई સાંધો અને સાંધનારી લીટીને अबને कમાં છેદવા દો.

अब, क બિંદુમાં દુભગાશે.

સિદ્ધતા—

(अडअ, बड, अई, बई સાંધો.)

∵ अडई, बडई ત્રિકોણોમાં—

अड = बड, (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

अई = बई, ,,

डई બંનેમાં સાધારણ;

∴ △ अडई ≡ △ बडई. (પ્ર. ૧૪

∴ ∠ अडक = ∠ बडक.

હવે △अडक, △बडकમાં—
अड=बड,
डक બંનેમાં સાધારણ,
∠ अडक=∠ बडक;
∴ △ अडक ≡ △ बडक. (પ્ર. ૧૦)
∴ अक = कब.

૩જા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. ઉપલા કૃત્યની આકૃતિમાં अक, डईને કાટખુણે દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

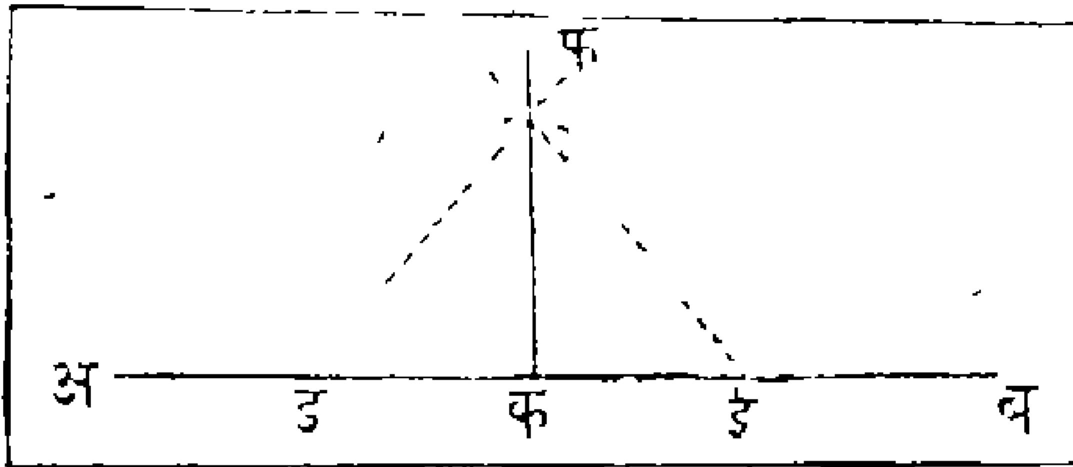
૨. આપેલી સીધી લીટીના ૪, ૮......સરખા ભાગ કરો.

૩. આપેલી સીધી લીટીના એવા બે ભાગ કરો, કે (૧) એક બીજાથી ત્રણગણો થાય; (૨) એક બીજાથી સાતગણો થાય.

૪. આપેલા ત્રિકોણના પાયામાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે તેનું સામા શિરોબિંદુથી અંતર બાકીની બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ બરાબર હોય.

કૃત્ય ૪.

આપેલી લીટી પર તેમાં આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરો.



પક્ષ—अब આપેલી લીટી છે. क આપેલું બિંદુ છે.
સાધ્ય—कમાંથી अब પર લંબ દોરવો.

પહેલી રીત.

રચના—આપેલી લીટીમાં कથી સરખે અંતરે અને તેની સામસામી બાજુએ ड અને ई બિંદુ લો. ड, ई મધ્યબિંદુઓ ધારીને कडथी

ગમે તેટલી મોટી ત્રિજ્યાએ **ફ**માં છેદનારા કૌંસો દોરો. **કફ** સાંધો.

કફ, **અબ** પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(**ફડ**, **ફઈ** સાંધો.)

∵ △ **ફકડ** અને △ **ફકઈ**માં—

કડ = **કઈ**. (રચના)

ફડ = **ફઈ**, (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

કફ બંનેમાં સાધારણ;

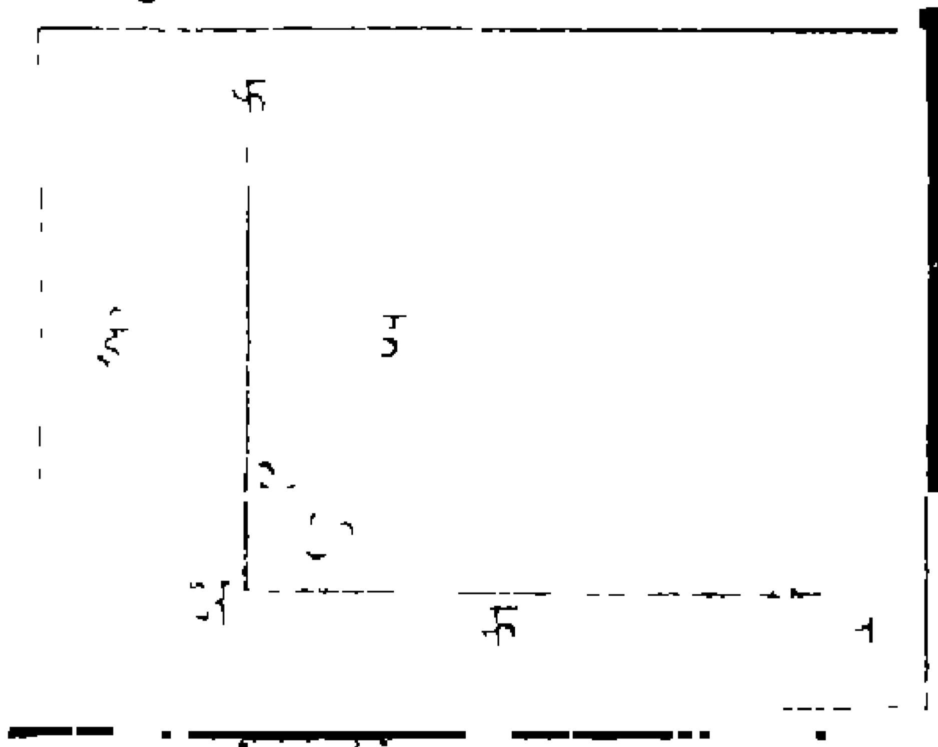
∴ △ **ફકડ** ≡ △ **ફકઈ**, (પ્ર. ૧૪)

∴ ∠ **ફકડ** = ∠ **ફકઈ**;

∴ **કફ**, **અબ** પર લંબ છે.

બીજી રીત.

જે બિંદુમાંથી લંબ દોરવો છે તે બિંદુ અ છે એમ ધારો.



રચના—અને મધ્યબિંદુ ધારી ગમે તે ત્રિજ્યાએ **કડઈ** કૌંસ દોરો, અને તેને **અબ**ને **ક**માં છેદવા દો. તેજ ત્રિજ્યાએ તે કૌંસના **કડ**, **ડઈ** ભાગ કાપી કાઢો. **ડ** અને **ઈ** મધ્યબિંદુઓ લઈને પહેલાંના જેટલીજ ત્રિજ્યાએ એક બીજાને **ફ**માં છેદનારા બે કૌંસ દોરો. **અફ** સાંધો.

સિદ્ધતા—

(**અડ**, **અઈ**, **ફડ**, **ફઈ** સાંધો.)

∵ **અડ** = **ડઈ** = **ઈઅ**.

∴ **अडई** સમભુજ ત્રિકોણ છે.
∴ ∠**डअई** = ६०°. (પ્ર. ૧૨, ઉ. સિ. ૨)
તેમજ ∵ **अफ**, ∠**डअई**ને દુભાગે છે, (કૃ. ૩)
∴ ∠**डअफ** = ૩૦°.
પણ △. **अकड** સમભુજ છે,
∴ ∠**कअड** = ૬૦°.
∴ ∠**बअफ** = ૯૦°.

૪થા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ચોરસ જેવડો ચોરસ દોરો.

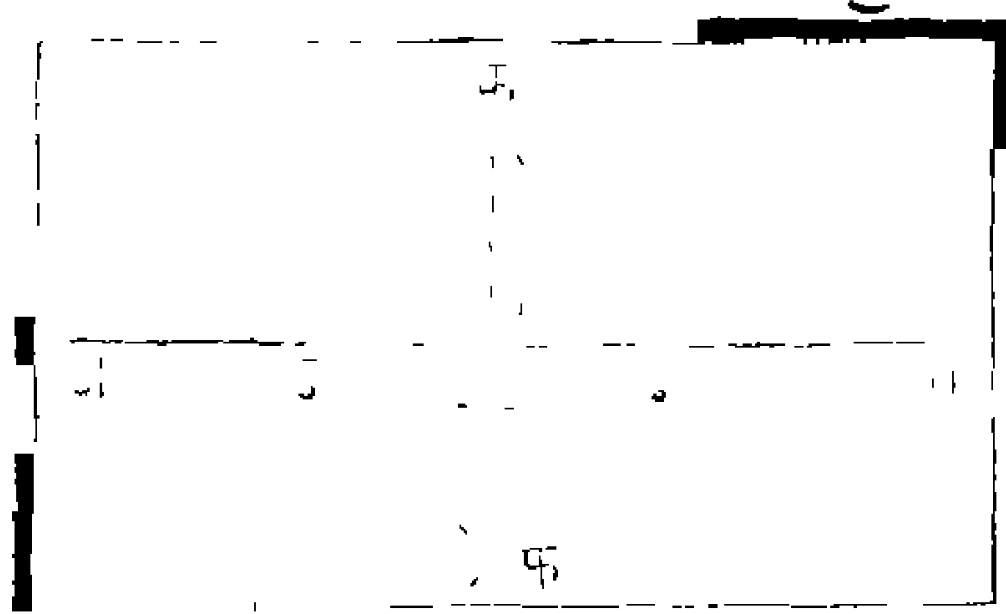
૨. ૪૫ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ વગર કાઢો.

૩. ૨૨½ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ લીધા વગર કાઢો.

૪. જેનો કર્ણ આપેલી સીધી લીટી બરાબર થાય, એવો ચોરસ દોરો.

કૃત્ય ૫.

આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટી પર તેની બહાર આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવો.



પક્ષ— **अब** આપેલી લીટી છે. **क** આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—**क**માંથી **अब** પર લંબ દોરવો.

રચના—**क** મધ્યબિંદુ અને જોઈતી ત્રિજ્યા લઈને **अब**ને **ड** અને **ई**માં છેદનારો કોંસ દોરો. **ड**, **ई** મધ્યબિંદુઓ લઈને **डई**

જેટલી ત્રિજ્યાએ, એક બીજાને **क**માં છેદે એવા બે કૌંસ દોરો. **कफ** સાંધો. ધારો કે **कफ**, **अब**ને **ग**માં છેદે છે.

कग, **अब** પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(**कड**, **कई**, **फड**, **फई** સાંધો.)

∵ △**कडफ** અને △**कईफ**માં—

कड = **कई**,

फड = **फई**,

फक બંનેમાં સાધારણ;

∴ △**कडफ**=△**कईफ**. (પ્ર ૧૪)

∴ ∠**डकफ** = ∠**ईकफ**.

હવે △**डकग** અને △**ईकग**માં—

∵ **कड** = **कई**,

कग બંનેમાં સાધારણ.

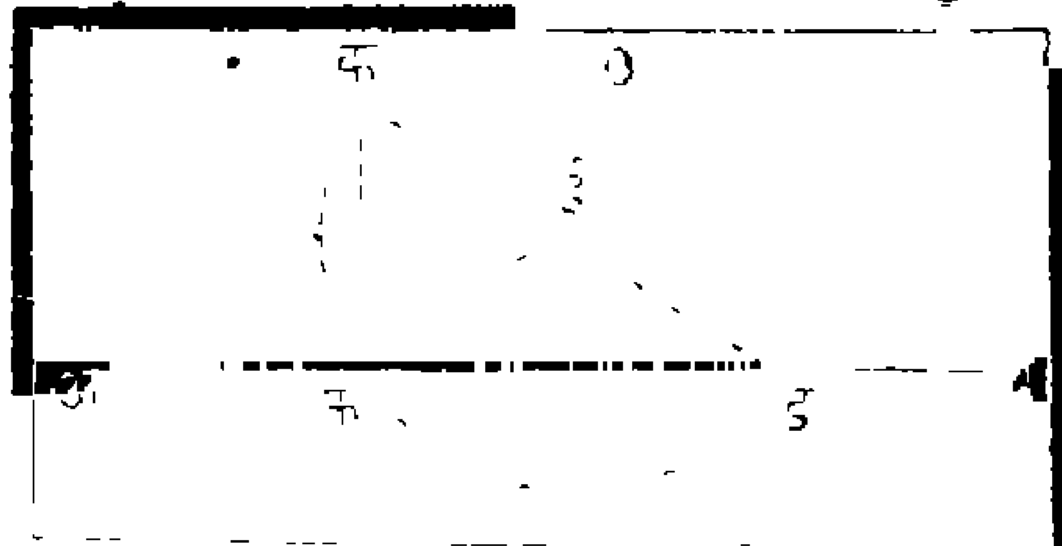
∠**डकग** = ∠**ईकग**;

∴ △**डकग** ≡ △**ईकग**; (પ્ર. ૧૦)

∴ ∠**कगड** = ∠**कगई**.

∴ **कग**, **अब** પર લંબ છે

બીજી રીત.



રચના—**अब**માં (**क**ની બરાબર નીચે ન હોય એવું) ગમે તે **ड** બિંદુ લો. **क**, **ड** સાંધો.

कडને **ई**માં દુભાગો.

ई મધ્યબિંદુ અને **ईड** ત્રિજ્યા લઈને **अब**ને **फ**માં છેદનારો કૌંસ દોરો. **कफ** સાંધો.

∴ कफ, अब પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(ई, फ સાંધેા.)

∵ △कईफमां कई = फई,

∴ ∠कफई = ∠फकई. (પ્ર. ૧૨)

તેજ પ્રમાણે ∵ △ईफडमां ईफ=ईड,

∴ ∠ईफड = ∠फडई; (પ્ર. ૧૨)

∴ ∠कफई + ∠ईफड = ∠फकई + ∠फडई.

પણ ∠कफई + ∠ईफड = ∠कफड,

∴ ∠कफड=∠फकई+∠फडई.

∴ ∠कफड=½(∠कफड+∠फकई+∠फडई).

પણ ∵ ∠कफड+∠फकई+∠फडई=૨ કાટખુણા,

(પ્ર. ૮)

∴ ∠कफड=૧ કાટખુણેા.

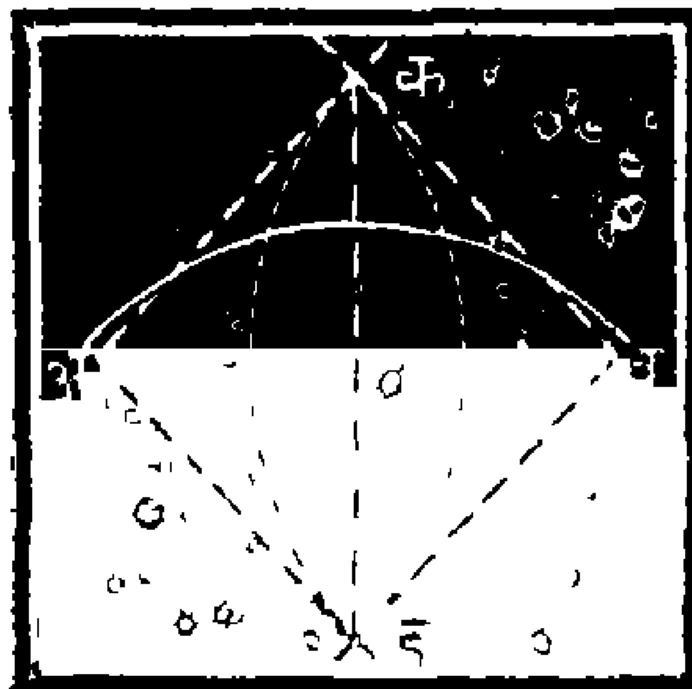
∴ कफ, अब પર લંબ છે.

૫મા કૃત્ય પર પ્રશ્ન.

अबक, ગમે તેવેા ત્રિકેાણુ દેારેા. દરેક શિરેાબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દેારેા. આ લંબેા એકજ બિંદુમાં મળે છે એ જોઈ લેા.

કૃત્ય ૬.

આપેલેા કૌંસ દુભાગવેા.



પક્ષ—अब આપેલેા કૌંસ છે.

સાધ્ય—अबને દુભાગવા.

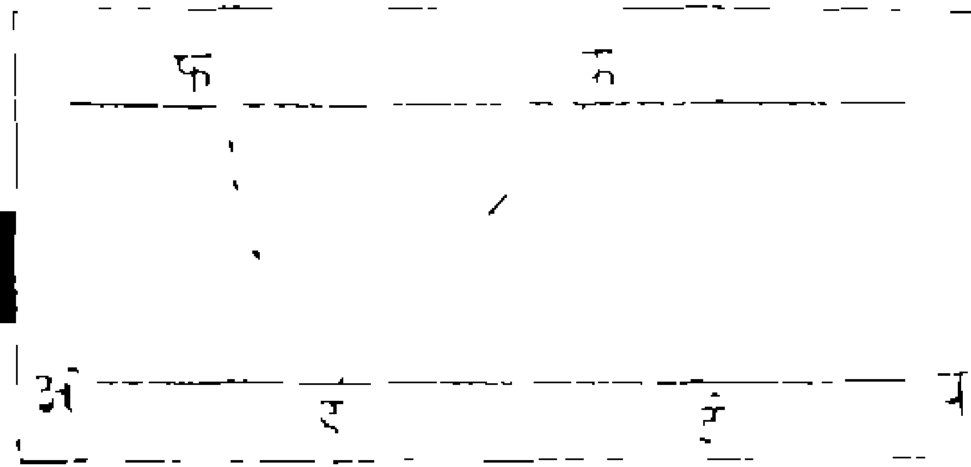
રચના—**अ** મધ્યબિંદુ અને **अब**ના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને **ब** મધ્યબિંદુ લઈને પહેલા કૌંસને **क** અને **ड**માં છેદે એવો બીજો કૌંસ દોરો. **कड** સાંધો.

कड, **अब** કૌંસને **ई**માં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(આ કૃત્યની સિદ્ધતા નવી ભૂમિતિનાં બીજા ભાગમાંના પ્રમેયના આધાર સિવાય સહેલી રીતે આપવી શક્ય નથી, માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની ખાસ જરૂર નથી.

કૃત્ય ૭.

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવી.



પક્ષ—**अब** આપેલી લીટી છે. **क** આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—**क**માંથી **अब**ને સમાંતર લીટી દોરવી.

રચના—**अब**માં એક ગમે તે **ड** બિંદુ લો. **डक** સાંધો. **कडब**થી વિરુદ્ધ બાજુએ **डक** સાથે **कडब** જેવડો ખુણો કરનારી **कफ** લીટી દોરો.

સિદ્ધતા—

∴ **कफ** અને **अब** લીટીઓને **कड** લીટી મળે છે,

અને ∠**फकड**=∠**कडब**; (રચના)

∴ **कफ** ॥ **अब**. (પ્ર. ૪)

ઉપલી રચનામાં ∠**बडक** જેવડો ∠**डकग**, **डक**ની તેજ બાજુએ (એટલે **डक**ની જે બાજુએ ∠**बडक** છે તેજ બાજુએ, એટલે જમણી બાજુએ) કર્યો હોય તો ચાલે કે ? કેમ નહિ ? તેજ બાજુ પર ખુણો કરીને સમાંતર લીટી દોરવી હોય, તો ખુણો કેવડો

કરવો? તેજ બાજુ પર ∠બકક જેવડો ખુણો કરીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય, તો ક બિંદુ ક્યાં લેવું?

૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસપાસેની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આપ્યાં હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો.

૨. જેની દરેક નાની બાજુ મોટી બાજુથી અર્ધી હોય, એવો એક લબચોરસ આપેલી લીટી પર દોરો.

૩. જેનો એક ખુણો ૬૦° હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલી લીટી પર કાઢો

૪. જેનો એક ખુણો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૫. જેની બે બાજુઓ અને કર્ણ અનુક્રમે ૫, ૨, ૪ સે. મી. હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કરો.

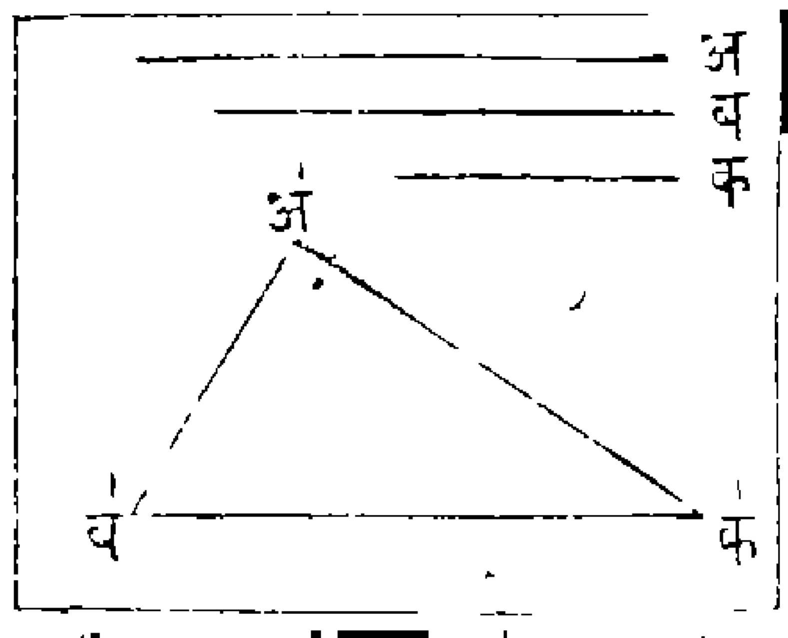
૬. જેની એક બાજુ ૨·૫" અને કર્ણ ૪" હોય એવો લંબચોરસ કાઢો.

૭. આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય એવી એક સમાંતર લીટી દોરો.

૮. બે પાસપાસેની બાજુઓ અને ગમે તે સામસામી બાજુઓની વચ્ચેનું અંતર એ આપ્યાં છે; તે પરથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

કૃત્ય ૮.

આપેલી ત્રણ લીટી એવી છે, કે તે પૈકી કોઈ પણ બે મળીને ત્રીજીથી વધારે છે; તો જે ત્રિકોણની બાજુઓ આ લીટીઓની બરાબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—अ, ब, क, એવી ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓ છે, કે જે પૈકી કોઈ પણ બેનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે છે.

સાધ્ય—अ,ब,क, જેટલી જેની બાજુઓ હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવો.

રચના—अ જેટલી बक લીટી દોરો. ब અને क મધ્યબિંદુઓ ધારીને અનુક્રમે क અને ब જેટલી ત્રિજ્યાએ બે કાંસો દોરો. તેમને એક બીજાને अમાં છેદતા દો. अब, अक સાંધો.

अबक માગેલો ત્રિકોણ છે.

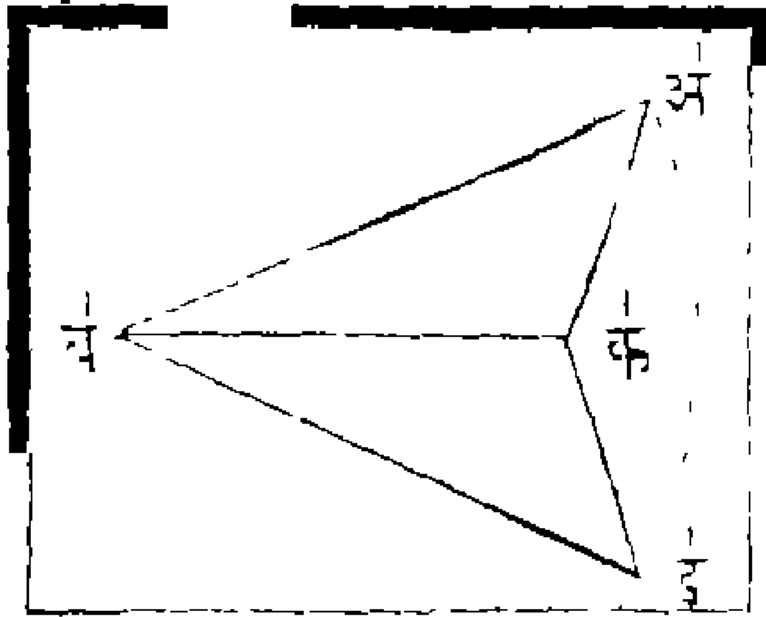
સિદ્ધતા—बक = अ,

कअ = ब,

बअ = क;

∴ अबक ત્રિકોણની બાજુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર છે.

ધારો કે આપણે એકજ પાયા પર બની શકે તેટલા એવા ત્રિકોણો દોરવા છે, કે જેમની બાજુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર હોય; તો આપણે તે કેમ દોરીશું ?



• ધારો કે अ,ब,क, આપેલી લીટીઓ છે, અને તે પૈકી अ પાયો છે.

अ જેટલી बक લીટી દોરો. ધારો કે कમાંથી ब જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી છે, તો તે કેટલી દોરી શકાશે ? એવી લીટીઓના બીજા છેડા બતાવનારી લીટી (कथी ब અંતરે હોય

એવાં સર્વ બિંદુઓનો માર્ગ આપણે શી રીતે દોરી શકીએ ? "अं મધ્યબિંદુ અને ब જેટલી ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો." આ વર્તુળની સર્વ ત્રિજ્યાઓ ब જેટલી લાંબી છે. આ ત્રિજ્યાઓ સિવાય अंમાંથી દોરેલી બાકીની સર્વ લીટીઓ बथी ઓછી કે વધારે થશે. હવે, बंમાંથી क જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી હોય, તો તે લીટીઓ કઈ થશે ? "बं મધ્યબિંદુ અને क ત્રિજ્યા લઈને દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ." આ વર્તુળો એક બીજાને કયાં છેદે છે ? "अं અને डं બિંદુઓમાં" આ બિંદુઓમાંથી बं અને कं સુધી દોરેલી લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે ? "આ બિદુઓ સિવાય તમે બીજું એવું કોઈ બિંદુ કાઢી શકશો, કે જેમાંથી बं, कं સુધી દોરેલી લીટીઓ અનુક્રમે क અને ब લબાઈની થાય ? "ના."

अ, ब, क, જેટલી જેની બાજુઓ અનુક્રમે છે, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ જ્યારે बंकंની ઉપલી બાજુએ થઈ શકે છે; ત્યારે તેવડીજ બાજુઓનો बंकंडं ત્રિકોણ बंकं પાયા પર, डं છેડો ઉપલી બાજુએ રાખીનેજ મૂકયો હોય, તો डं બિદુ કયાં પડશે ? "अं પર." શા માટે ? "તે બીજી બાજુએ પડે તો ઉપલા નિયમને બાધ આવે."

આ ઉપરથી સિદ્ધ થાય છે, કે જેની બાજુઓ અનુક્રમે अ ब, कની બરાબર હોય એવો કોઈ પણ ત્રિકોણ बंकं પર મૂકયો હોય તો તેનું ત્રીજું શિરોબિંદુ अं પર પડવું જોઈએ; માટે જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી છે, એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં શો નિયમ નીકળે છે ? "તે એકરૂપ હોય છે."

૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરાબર એક ત્રિકોણ દોરો.

૨. જેની સરખી બાજુઓમાંથી એક બાજુ આપેલી હોય, એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ આપેલા પાયા પર દોરો.

૩. આપેલી લીટી પર એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો કે જેની દરેક સરખી બાજુ પાયાથી બમણી હોય.

૪. જેનો પાયો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

૫. આપેલા પાયા પર એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

૬. * કાટખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૭. જેની દરેક બાજુ એક કર્ણની બરાબર હોય, એવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો.

૮. આપેલા પાયા પર નિયમિત ષટ્કોણ કાઢો.

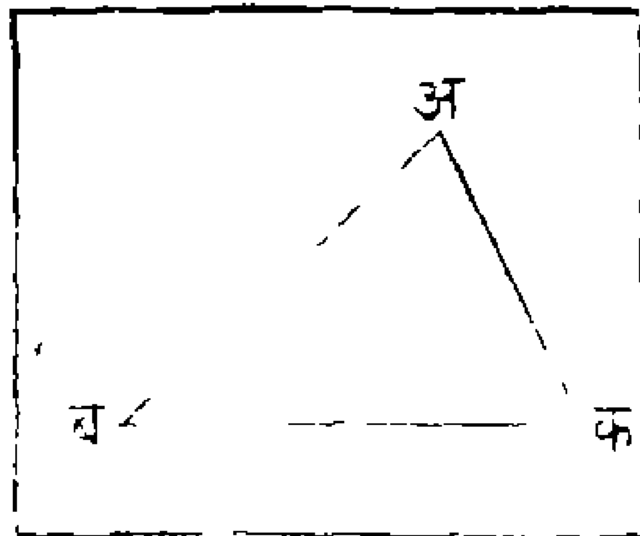
૯. એક ત્રિકોણની (પાયા સિવાયની) બે બાજુઓ અને ઉંચાઈ (સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ) આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૧૦. એક ત્રિકોણનો પાયો, એક બાજુ, અને સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા, એટલું આપેલું છે; તે પરથી ત્રિકોણ કાઢો.

૧૧. એક ત્રિકોણનો પાયો, ઉંચાઈ, અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૧૨. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે કર્ણો અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

સૂચના—



* ત્રિકોણના ખુણા અને બાજુઓ દર્શાવવા માટે નીચેનો સંકેત નક્કી થએલો છે: અબક ત્રિકોણમાં—

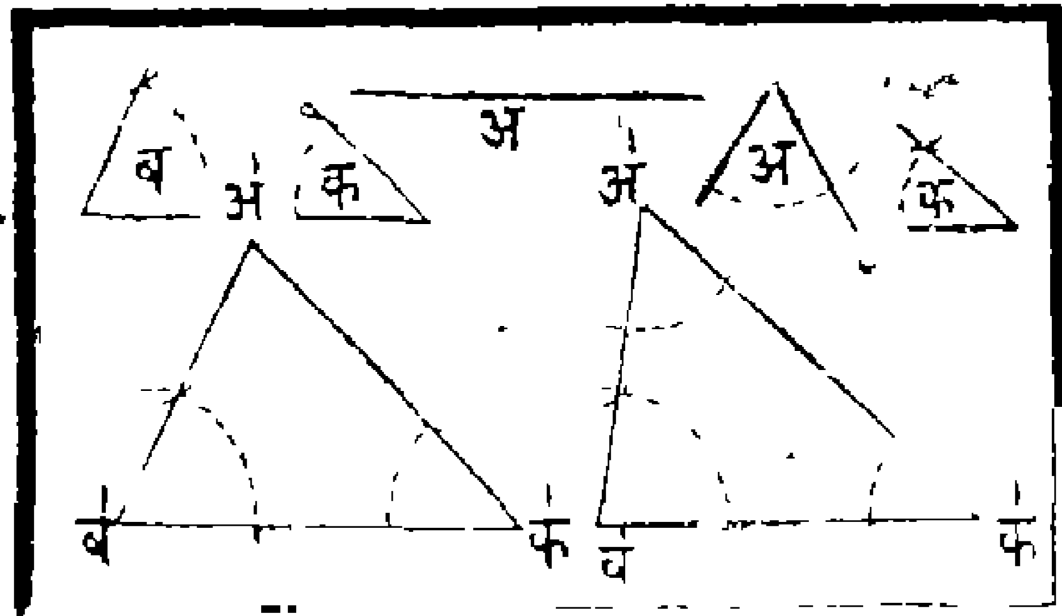
∠ અ એટલે બઅક ખુણો,
∠ બ એટલે અબક ખુણો,
∠ ક એટલે બકઅ ખુણો, ઇ.

તેમજ,

अ બાજુ એટલે ∠ अની સામેની (= वक) બાજુ;
व બાજુ એટલે ∠ वની સામેની (= अक) બાજુ;
क બાજુ એટલે ∠ कની સામેની (= अव) બાજુ.

કૃત્ય ૯.

એક બાજુ અને બે ખુણા આપેલા હોય, તે પરથી ત્રિકોણ દોરવો.



એક ત્રિકોણને ત્રણ ખુણા હોય છે. તે પૈકી કોઈ પણ બે ખુણા એક બાજુને અડકેલા હોય છે, અને ત્રીજો ખુણો તે બાજુની સામે હોય છે.

એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ આપીને બે ખુણા આપવા, એટલે (૧) તે બાજુને અડકીને રહેલા બન્ને ખુણા આપવા; અથવા (૨) તે બાજુની સામેનો એક ખુણો અને તે બાજુને અડકી રહેલો એક ખુણો આપવો. એ સિવાય ત્રીજા પ્રકારનો સંભવ નથી.

૧લો પ્રકાર—अ આપેલી બાજુ છે. ∠ व અને ∠ क, આ अ બાજુને અડકીને રહેલા બે ખુણા છે.

૨જો પ્રકાર—अ આપેલી બાજુ. ∠ अ = अ બાજુની સામેનો ખુણો, અને ∠ क = अ બાજુને અડકીને રહેલો ખુણો.

(૧) રચના—अ લંબાઈની એક वक લીટી દોરો. व છેડા આગળ कवअ એ ∠ व જેવડો ખુણો કરો. क છેડા આગળ वकअ એ ∠ क જેટલો ખુણો કરો.

अवक આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૨) રચના— ∠ अ અને ∠ कનેા સરવાળેા કરીને તે બે કાટખુણામાંથી બાદ કરેા. બાદબાકી આવે તે ત્રિકેાણુને‌ા બાકી રહેલેા ત્રીજો ખુણેા છે, એટલે કે वને અડકીને રહેલા ખુણા પૈકી બીજો (ब) ખુણેા છે. આ ખુણેા જાણ્યા પછી પહેલા પ્રકારમાં કહ્યા પ્રમાણે કૃતિ કરીને ત્રિકેાણુ દેારેા.

સિદ્ધતા—∵ बक = अ,

∠ कबअ = ∠ ब,

∠ बकअ = ∠ क;

∴ △ अबकની એક બાજુ અને બે ખુણા, આપેલી બાજુ અને બે ખુણા બરાબર અનુક્રમે છે.

अ બાજુ દેાર્યા પછી अની અમુક બાજુએજ ∠ ब દેારવેા જોઈએ, અને અમુક બાજુએજ ∠ क કાઢવેા જોઈએ એમ નથી. આ ખુણા ગમે તેમ દેાર્યા હેાય તેાપણું તૈયાર થનારા ખુણા સરખાજ બને છે. આ વાત ત્રિકેાણુ એક પર એક મૂકયા હેાય તેા ધ્યાનમાં આવશે. આ પરથી એ પણુ સ્પષ્ટ થાય છે, કે બે ત્રિકેાણુના બબ્બે ખુણા અને એકેક બાજુ સરખી હેાય તેા ત્રિકેાણુ એકરૂપજ હેાય છે.

૯મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણુ ત્રિકેાણુનેા કર્ણુ અને એક સાંકડેા ખુણેા આપેલા છે; તેા તે ત્રિકેાણુ દેારેા.

૨. એક કાટખુણુ ત્રિકેાણુની કાટખુણેા કરનારી એક બાજુ અને તેની સામેનેા ખુણેા આપેલાં છે; તેા તે ત્રિકેાણુ દેારેા.

૩. એક કાટખુણુ ત્રિકેાણુનેા એક સાંકડેા ખુણેા બીજાથી બમણેા છે; તેા તે ત્રિકેાણુ દેારેા.

૪. સમદ્વિબાજુ કાટખુણુ ત્રિકેાણુનેા કર્ણુ આપેલેા છે તેા તે ત્રિકેાણુ કાઢેા.

૫. એક ત્રિકેાણુની ઉંચાઈ અને પાયા પાસેના બંને ખુણા આપેલાં છે; તેા તે ત્રિકેાણુ દેારેા.

૬. એક સમબાજુ ત્રિકેાણુની ઉંચાઈ આપેલી છે, તેા તે ત્રિકેાણુ કાઢેા.

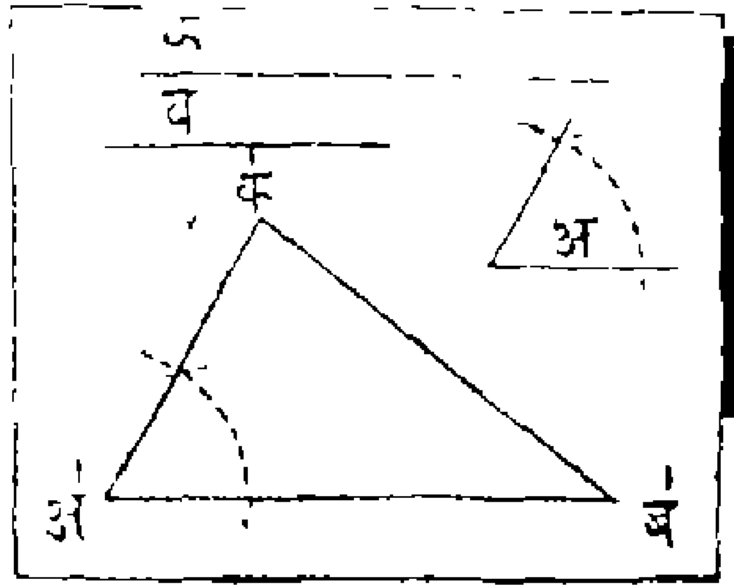
૭. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયાની સામેનો ખુણો એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૮. જેનો પાયાની સામેનો ખુણો પાયા પાસેના દરેક ખુણાથી ૪ગણો હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯. જેનો પાયો ૨.૪" હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૦.

ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આપેલાં હોય, તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—ब અને क એ આપેલી બાજુઓ છે. अ આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા ∠ अ જેવડો बअक ખુણો કાઢો. बअक ખુણાની अब અને अक એ બાજુઓ આપેલી क અને ब બાજુની બરાબર કરો.

अबक આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૦મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઈ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

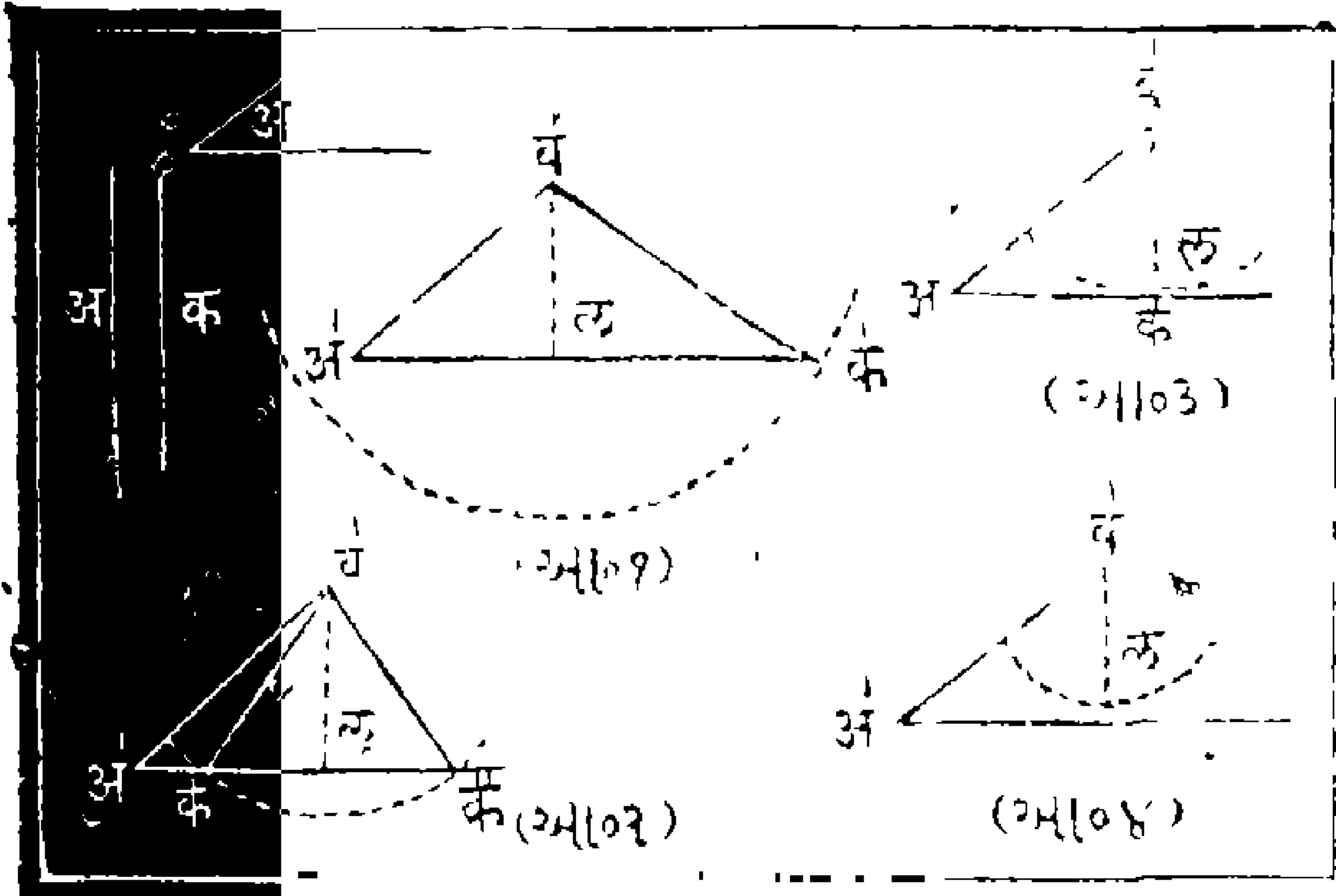
૨. જેનો એક ખુણો ૬૦° હોય અને તેમાં થઈને જતો કર્ણ ૪" લાંબો હોય, એવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુ કેટલી લાંબી છે?

૩. જેની મધ્યગા ૧.૨" હોય એવો સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

સૂચના—(કેળવણીખાતાએ નક્કી કરેલા ભૂમિતિના અભ્યાસક્રમમાં નીચેનું (૧૧મું) કૃત્ય આવતું નથી; માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની જરૂર નથી. આપેલા પક્ષ પરથી ત્રિકોણ બનાવવાના જે મુખ્ય પ્રકાર છે, તે બધાનો સમાવેશ થાય એટલા માટેજ ફક્ત આ કૃત્ય અહીં આપ્યું છે.)

કૃત્ય ૧૧.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એકની સામેનો ખુણો એ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—अ અને क આપેલી બાજુઓ છે, અને ∠ अ આપેલો ખુણો છે.

રચના—∠ अ જેવડો वअक ખુણો કરો. क જેટલી લાંબી अव બાજુ રાખો. व મધ્યબિંદુ ધારીને अ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો.

(ધારો કે ल = वમાંથી अक પર દોરેલો લંબ છે.)

अव અને ल સાથે સરખાવતાં अ (=वक)ની લંબાઈ ઓછી-વત્તી હોય તે પ્રમાણે નીચેના ચાર પ્રકાર થશે.

(૧) क (=वअ) કરતાં अ (=वक) વધારે લાંબી હોય, તો अ બિંદુ પરિઘની અંદર રહે છે, અને अवक એવો એકજ ત્રિકોણ બને છે. (આકૃતિ ૧ જુઓ.)

(૨) बंक, बंभ કરતાં નાની, પણ ळ કરતાં મોટી હોય, તો अ છેડો પરિઘની બહાર રહેશે, અને પરિઘ अंक લીટીને क અને क એ બે ઠેકાણે છેદશે.

એવી રીતે अंबक અને अंबक એવા બે માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ બનશે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

[એવે પ્રસંગે બે જવાબ આવે છે, તેથી આ સંદિગ્ધ પ્રકારનો દાખલો છે.]

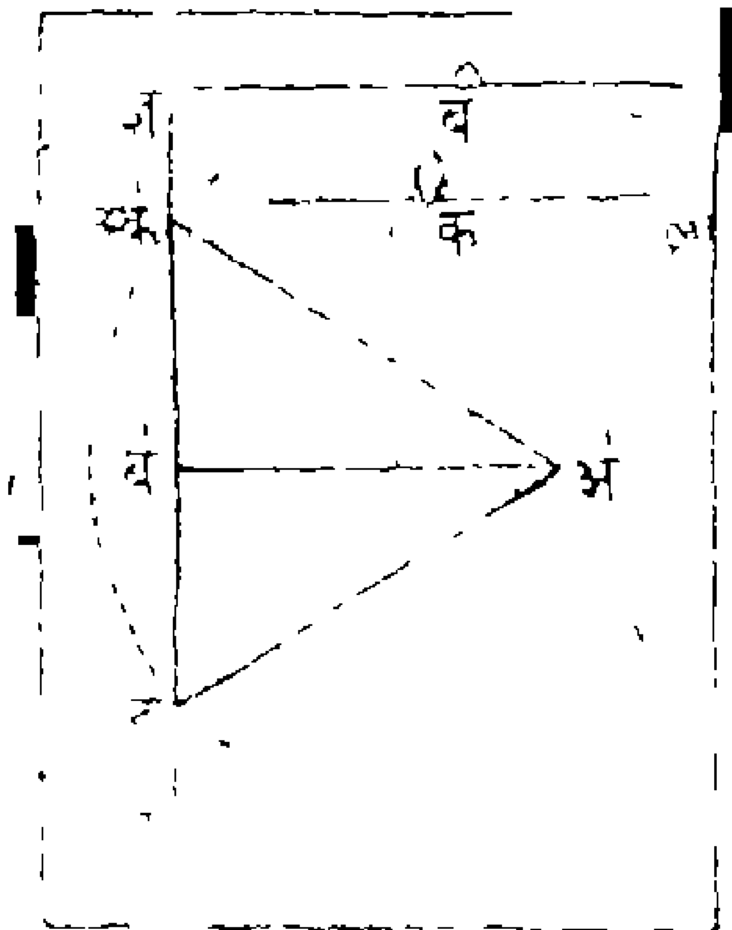
(૩) જો बंक, ळ બરાબર હોય. તો વર્તુળ अंक લીટીને ફક્ત એકજ ઠેકાણે સ્પર્શ કરશે. એવી સ્થિતિ હોય ત્યારે (ત્રીજી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે) ફક્ત એકજ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ થશે.

(૪) જો बंक, ळથી નાની હોય, તો વર્તુળ अंक લીટીને બીલકુલ સ્પર્શ કરશે નહિ. એવી સ્થિતિમાં ત્રિકોણ બીલકુલ બની શકશેજ નહિ. (આકૃતિ ૪ જુઓ.)

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

કૃત્ય ૧૨.

કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—ब કર્ણ છે, क બાજુ છે.

રચના—क જેટલી એક बअ લીટી દોરો. આ લીટીની સાથે કાટખુણો કરનારી क्षबक्ष અમર્યાદ લીટી દોરો. अ મધ્યબિંદુ અને ब ત્રિજ્યા લઈને क्षबक्ष લીટીને क અને ह માં છેદે એવો કૌંસ દોરો. अक અને अह સાંધો.

अबक અને अबह માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(૨૫૯ છે.)

૧૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબ એ આપેલાં છે; તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ, અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૮થી ૧૨ સુધીનાં કૃત્યો પરના પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવોઃ—

(૧) $\angle$ब = ૩૦°, ब = ૨″, क = ૪″.
(૨) $\angle$ब = ૧૩૫°, क = ૩″, ब = ૭″.
(૩) $\angle$ब = ૪૫°, क = ૩″, ब = ૭″.
(૪) अ = ૪″, $\angle$ब = ૨૭°, $\angle$क = ૬૮°.
(૫) अ = ૫″, $\angle$अ = ૨૭°, $\angle$क = ૧૯°.
(૬) ब = ૩″, $\angle$क = ૯૯°, $\angle$ब = ૮૮°.

૨. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ અને ઉંચાઈ આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને તેની સામેનો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો, અને પાયાની સામેના ખુણાનો તથા પાયાની પાસેના એક ખુણાનો સરવાળો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

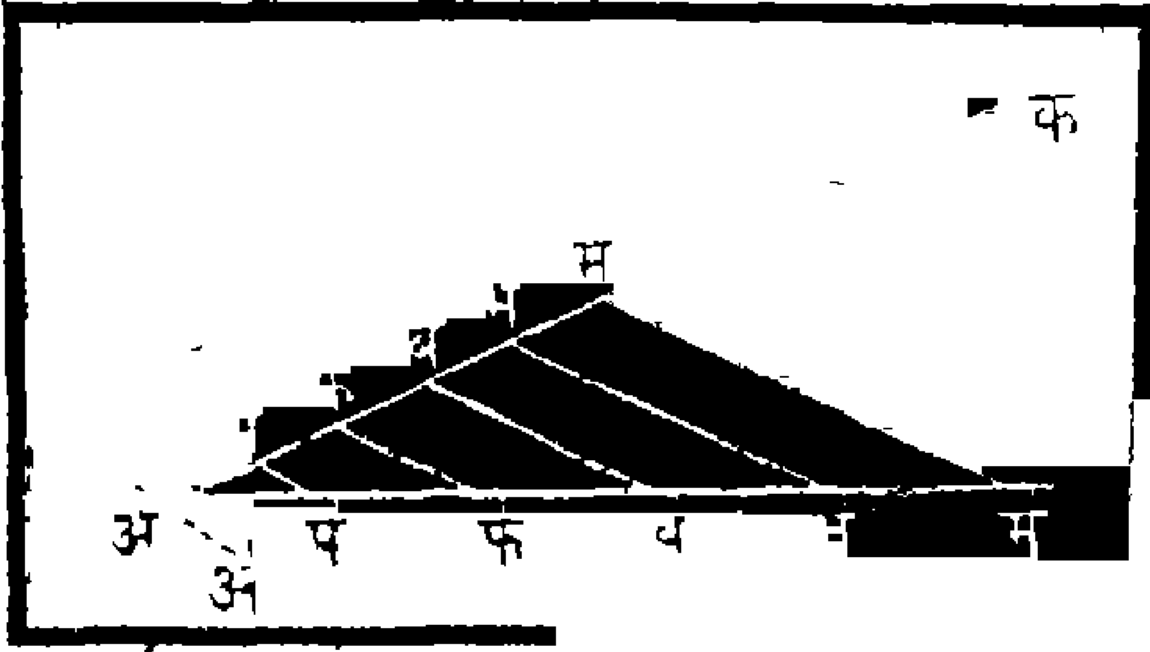
૫. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુની ઉંચાઈનો અને એક બાજુનો સરવાળો તથા પાયો એ બે આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણુ દોરો.

૬. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુના પાયાની દિશા અને ત્રણ બાજુ પૈકી દરેક બાજુમાંના એક બિંદુનું સ્થાન એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણુ દોરો.

૭. ત્રિકોણુનો પાયો, ઉંચાઈ, અને તેની આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ત્રણ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણુ કાઢો.

કૃત્ય ૧૩.

આપેલી લીટીના અમુક સરખા ભાગ કરવા.



પક્ષ—अम' આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—તેના અમુક (પાંચ) ભાગ કરવા છે.

રચના—अम'ની સાથે સાંકડો ખુણો કરતારી ગમે તે अक અમર્યાદ લીટી દોરો. કંપાસ લઈને તેના બે છેડા એક બીજાથી જરા આઘા રાખીને अथी શરૂ કરીને अक લીટીના अप, पफ, फब, बभ, भम, એવા પાંચ સરખા ભાગ એક પછી એક લો. मम' સાંધો, भ, ब, फ, प. બિંદુઓમાંથી मम'ને સમાંતર અને अम'ને છેદનારી भभ', बब', फफ', पप' લીટીઓ દોરો.

अप', प'फ', फ'ब', ब'भ', भ'म', આ ભાગેલા ભાગ છે.

अमां થઈને पप'ને સમાંતર अअ' દોરો.

સિદ્ધતા—∴ अर्म, पर्प, फर्फ, बर्ब, भर्भ, मर्म આ સમાંતર છે, અને તેમને છેદનારી अक લીટીના अप, पफ ......આ ગાળાઓ સરખા છે.

∴ अर्म લીટીના अर्प, पर्फ... આ ગાળાઓ પણ સરખા છે. (પ્ર. ૨૪)

૧૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૨. આપેલી લીટીનો $\frac{૧}{૯}$ ભાગ કાપી કાઢો.

૩. આપેલી લીટીનો $\frac{૨}{૧૧}$ ભાગ કાપી કાઢો.

૪. આપેલ अब લીટીના क બિંદુમાં એવા બે ભાગ કરો, કે $\frac{अक}{कब} = \frac{૩}{૫}$.

૫. તેરમા કૃત્યની આકૃતિમાં $\frac{फर्फ}{पर्प}$=૨, અને $\frac{भर्भ}{पर्प}$ = ૪ છે એમ સિદ્ધ કરો.

પરિશિષ્ટ अ.

પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. ચતુષ્કોણના अ, ब, क, ड અનુક્રમે ચાર ખુણા છે. હવે જો अ અને ब મળીને क અને डના સરવાળાની બરાબર હોય, તો આ ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ એક બીજીને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૨. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાની પાસેના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૩. अबकडई એક નિયમિત પંચકોણ છે. તેમાં अक, अड સાંધો. बक, ईडને લંબાવીને फમાં મળવા દો. फकड અને अकड ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી જો તેની એક બાજુને સમાંતર હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫. ત્રિકોણના બે અંદરના ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને કદી પણ કાટખુણે છેદતી નથી.

૬. **અબ, કઙ** સમાંતર લીટીઓ છે, અને તેમની વચ્ચે **પ** એક બિંદુ છે; તો ∠ **બપઙ** = ∠ **અબપ** + ∠ **કઙપ** એમ બતાવી આપો.

૭. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના બે છેડામાંથી સામી બાજુઓ પર લંબ દોરેલા છે; તો તે લંબ પાયાની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાંનો દરેક ખુણો પાયાની સામેના ખુણાથી અર્ધો છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. **અબક** ત્રિકોણના **અ** ખુણાને દુભાગનારી લીટી **બક**ને **ઙ**માં મળે છે, અને **બક**ને **ઈ** સુધી વધારેલી છે; તો ∠ **અબક** + ∠ **અકઈ** = ૨ ∠ **અઙક** એ સિદ્ધ કરો.

૯. ત્રિકોણની **અબ, અક,** બાજુઓ અનુક્રમે **ઙ** અને **ઈ**માં દુભાગેલી છે; અને **બઈ, કઙ** અનુક્રમે **ફ** અને **ગ** સુધી એવી રીતે વધારેલી છે કે **ઈફ** = **બઈ**, અને **ઙગ** = **કઙ** થાય છે; તો **ફઅગ** એક સીધી લીટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૦. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો, પાયો વધારવાથી થતા બહારના ખુણાની બરાબર હોય છે.

૧૧. **અબક** ત્રિકોણના **બ** અને **ક** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **ઙ**માં મળે છે; તો ∠ **બઙક** = ૯૦° + $\frac{1}{2}$ **અ** છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. **બક**ની એકજ બાજુએ **અબક** એક સમબાજુ અને **ઙબક** એક સમદ્વિબાજુ એવા બે ત્રિકોણ દોરેલા છે, અને ∠ **બઙક** = $\frac{1}{2}$ ∠ **બઅક** છે; તો **અઙ** = **બક** છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. **અબક** ત્રિકોણની **બક, કઅ, અબ** બાજુઓમાં **ક્ષ, ય, જ્ઞ** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે ∠ **બઅક્ષ** = ∠ **કબય** = ∠ **અકજ્ઞ**; તો બતાવી આપો કે **અક્ષ, બય, કજ્ઞ,** આ એક બિંદુમાં થઈને ન જતી હોય, તો તેમનાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તે અને **અબક** ત્રિકોણ એ બેના ખુણાઓ અનુક્રમે સરખા છે.

૧૪. **અબકઙ** કાટખુણુ ચતુષ્કોણની એક નાની (**અબ**) બાજુમાં એક **પ** બિંદુ છે; તો એવો એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો, કે તેનું એક શિરોબિંદુ **પ** થાય, અને બાકી રહેલાં શિરોબિંદુઓ કાટખુણુ ચતુષ્કોણની બાકીની બાજુઓ ઉપર પડે

१५. **अबक** त्रिकोणनी **बक** બાજુ **ड** સુધી વધારી છે. **अई**, ∠**अकब**ने દુભાગે છે અને **अब**ને **ई**માં મળે છે. **ई**માં થઈને **बक**ને સમાંતર લીટી દોરી, તે **अक**ને **फ**માં અને **अकड**ने દુભાગનારી લીટીને **ग**માં મળે છે; તો **ईफ** = **फग** છે એમ બતાવી આપો.

१६. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણની **अब**,**बक**,**कअ** બાજુઓમાં અનુક્રમે **प**,**द**,**र**, બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે **अप** = **बद** = **कर** છે; તો △**पदर** સમબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

१७. એક વર્તુળના **अअं**, **बबं**, **ककं** વ્યાસ છે; △ **अबक** ≡ △**अंबंकं** છે એ સિદ્ધ કરો.

१८. **अबक** ત્રિકોણની **अब**. **बक** બાજુઓ પર ત્રિકોણની બહાર **अबफग**, **बकईड** ચોરસ દોરેલા છે; તો △**अबड** ≡ △ **फबक** એમ બતાવી આપો.

१९. **अबक** ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ પર ત્રિકોણની બહાર **बकड**, **कअई**, **अबफ** એ સમબાજુ ત્રિકોણો કાઢેલા છે; તો **अड** = **बई** = **कफ** એમ બતાવી આપો.

२०. **क्षय**માંના **म** બિંદુથી **क्षय**ની બંને બાજુએ **मप**, **मद**, આ સરખી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે ∠ **यमप** = ∠ **यमद** છે; તો △ **पक्षय** ≡ △ **दक्षय** છે એમ બતાવી આપો.

२१. **अबकड** ચોરસ છે. તેની એકેક બાજુમાંથી **अई**, **बफ**, **कग**, **डह** આ સરખા કકડા કાપી કાઢેલા છે; તો **ई**,**फ**,**ग**,**ह**, આ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ સિદ્ધ કરો.

२२. **अबक** ત્રિકોણની **अब**, **अक** બાજુઓ સરખી છે. **अबक** ત્રિકોણની બહાર **अब**, **अक** પર **अडब**, **अईक** સમબાજુ ત્રિકોણો દોરેલા છે. **बई**, **कड** એક બીજીને **म**માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે, **मड** = **मई**.

२३. **अबकडई** એક નિયમિત પંચકોણ છે. **अ**, **ब** ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે; તો **मक**, **मड**, **मई** અનુક્રમે **क**,**ड**,**ई** ખુણાને દુભાગે છે, અને **म** બિંદુ પંચકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે, એમ બતાવી આપો.

૨૪. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણ છે. **बक**ને વધારીને તેમાં **ड** બિંદુ લીધું છે; તો તે **ब** કરતાં **अ**ની વધારે પાસે છે એમ બતાવો.

૨૫. **क्षयज्ञ** કાટખુણ ત્રિકોણમાં **क्षय**=**क्षज्ञ** છે. ∠**य**ને દુભાગનારી **यर** લીટી **क्षज्ञ**ને **र**માં મળે છે. હવે જો **यज्ञ** પર **रज** લંબ દોર્યો હોય, તો **रज**=**क्षर** છે એમ બતાવો.

૨૬. **अबक** લીટીમાંના **ब** બિંદુમાંથી **बड**,**बई** બે સરખી લીટીઓ એવી દોરી છે, કે **डबई** કાટખુણો થયો છે. **अक** પર **डफ**, **ईह** લંબો દોરેલા છે; તો **डफ**=**ईह** છે એમ બતાવો.

૨૭. બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને પાયાની સામેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબો સરખા છે; તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૨૮. **अबक** ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓ બરાબર છે. **अब**માં **ड** બિંદુ લો. **कअ**ને **ई** સુધી વધારો, અને **अई**ને **अड** બરાબર કરો. હવે **ईड**ને વધારી હોય તો તે **बक**ને કાટખુણે છેદે એમ બતાવી આપો.

૨૯. જેનું મધ્યબિંદુ **म** છે એવા એક વર્તુળની **अब** જ્યા **क** સુધી વધારી છે; અને **बक**, **अम**ની બરાબર કરી છે. **कम** લીટી વર્તુળને **ड**માં છેદે છે, અને વધારવાથી ફરી તેને **ई**માં છેદે છે; તો ∠**अमई**, ∠**बमड**થી ત્રણગણો છે એમ બતાવી આપો.

૩૦. એક વર્તુળના **अब** અને **कड** ગમે તે બે વ્યાસ છે. **ब** બિંદુમાંથી એક લીટી **कड**ને સમાંતર દોરી છે. આ લીટી **अब**ની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે **कब**, **डब** લીટીઓથી દુભગાય છે એમ બતાવી આપો.

૩૧. * **अबक** ત્રિકોણના **ब** અને **क** એ સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સામી બાજુઓને અનુક્રમે **ई** અને **फ**માં મળે છે; તો **ईफ**, **बक**ને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૨. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अब**=**कड**, અને ∠**ब**=∠**क**; તો **बक**ને **अड** સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૩. ઉપલા પ્રશ્નમાંના **अबकड** ચતુષ્કોણના કર્ણ સરખા છે એ બતાવી આપો.

३४. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં ∠**अ**=∠**ब**, અને ∠**क**=∠**ड**; તો **अड**=**बक** છે એ બતાવો.

३५. * **अबक** ત્રિકોણમાં **अब**=**अक**. **बक** પર દોરેલા લંબ **अब** અને **अक** બાજુ પૈકી ગમે તે એક બાજુને **ड**માં અને બીજી બાજુના વધારેલા ભાગને **ई**માં છેદે છે; તો △**अडई** સમદ્વિબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

३६. **पदर** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની **पद**,**पर** સરખી બાજુઓમાં **प**થી સરખે અંતરે **क्ष** અને **य** બિંદુઓ લીધાં છે. **दय**, **रक्ष** એક બીજીને **ज्ञ**માં છેદે છે; તો **ज्ञदर**, **ज्ञक्षय** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો છે એ સિદ્ધ કરો.

३७. **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુમાં (જરૂર લાગે તો વધારીને) **ड** બિંદુ એવું લીધું છે, કે **बअड** અને **अबड** ખુણા સરખા થયા છે. **अडब** ખુણાને દુભાગનારી લીટી **अक**ને (અથવા તેના વધારેલા ભાગને) **ई**માં મળે છે; તો ∠**अबई**=∠**बअई** છે એમ બતાવો.

३८. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણના **ब** અને **क** ખુણા અનુક્રમે **बड** અને **कड**થી દુભગાયા છે. **अब**ને સમાંતર **डई** દોરેલી છે, અને તે **बक**ને **ई**માં મળે છે. **अक**ને સમાંતર **डफ** દોરેલી છે, અને તે **बक**ને **फ**માં મળે છે; તો **बई**, **ईफ**, **फक** સરખી છે એમ બતાવો.

३९ **अबक** સમદ્વિબાજુ કાટખુણુ ત્રિકોણ છે. તેનો **अब** કર્ણ છે. **अड** એ ∠**बअक**ને દુભાગનારી અને **बक**ને **ड**માં મળનારી લીટી છે; તો **अक**+**कड**=**अब** એ બતાવી આપો.

४०. * કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજા સાંકડા ખુણાથી બમણો હોય, તો કર્ણ બીજી બેમાંની નાની બાજુથી બમણો હોય છે.

४१. એક ચતુષ્કોણની ચારે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ચતુષ્કોણની ચારે બાજુની બરાબર હોય, અને એકનો એક ખુણો બીજાના તેને મળતા આવતા ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણો એકરૂપ હોય છે.

४२. **बक** પાયાની બંને બાજુએ **अबक** અને **डबक** એકરૂપ ત્રિકોણો છે, અને તેમની એક બીજીને મળતી આવતી બાજુઓ પાયાના એકજ છેડામાં મળે છે; તો **बक**, **अड**ને કાટખુણે દુભગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪૩. **અબક** અને **ડબક** એ બે ત્રિકોણો **બક** પાયાની એકજ બાજુએ છે. જો **અબ=ડક** અને **અક=ડબ** હોય, તો **અડ**, **બક**ને સમાંતર છે એમ બતાવો.

૪૪. * કાટખુણુ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૪૫. **અબક** ત્રિકોણમાં **અબ = અક** છે. **અબ**માં ગમે ત્યાં **ઈ** બિંદુ લઈને તેને **બક**ના મધ્યબિંદુ **ડ**ની સાથે સાંધ્યું છે; તો **અક** અને **અઈ**ની બાદબાકી **ડઈ** અને **ડબ**ની બાદબાકી કરતાં મોટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪૬. **અબકડઈફ** ષટ્કોણ છે; તો તેની પરિમિતિ **અકઈ** ત્રિકોણની પરિમિતિથી વધારે છે એમ બતાવો.

૪૭. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ કરતાં લાંબી લીટી ત્રિકોણની અંદર કોઈ પણ ઠેકાણે દોરી શકાશે નહિ એમ બતાવો.

૪૮. **અબક** સમબાજુ ત્રિકોણમાં **ડ** એક બિંદુ છે; તો **ડઅ**, **ડબ**, **ડક** લીટીઓથી ત્રિકોણ બની શકશે એમ બતાવો.

૪૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કર્ણ દરેક બાજુથી હમેશ મોટો હોય છે, (પણ દરેક ચતુષ્કોણના સંબંધમાં એ સત્ય લાગુ પડતું નથી).

૫૦. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુઓ પૈકી દરેક બાજુ ત્રીજી બાજુથી મોટી હોય, તો સરખી બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા કરતાં નાનો હોય છે એમ બતાવો.

૫૧. **અબક** ત્રિકોણમાં **અ** સૌથી મોટો ખુણો છે; તો એમ બતાવી આપો કે જેની બાજુઓ **અબ**, **અક**, અને **૨બક** બરાબર હોય એવો ત્રિકોણ દોરવો અશક્ય છે.

૫૨. **અબક** ત્રિકોણના **બ** અને **ક** સાંકડા ખુણા છે; અને $\angle$**ક** > $\angle$**બ** છે. **બક**માં **પ** એક બિંદુ છે; તો **અબ**થી **અપ** નાની છે એમ બતાવો. **અક**થી **અપ** નાની હોવા માટે **પ** ક્યાં હોવું જોઈએ ?

૫૩. વર્તુળમાંના **ક** બિંદુમાં થઈને **અબ** વ્યાસ જાય છે, અને **અક**માં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **મ** છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરોઃ—

(૧) **ક**થી પરિઘ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **કઅ** મોટી છે.

(૨) **ક**થી પરિઘ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **કબ** નાની છે.

(૩) **ક**માંથી **કક્ષ** અને **કય** આ બે અમે તે લીટીઓ પરિઘ સુધી દોરેલી હોય, અને જો ∠**કમક્ષ** > ∠**કમય** હોય, તો **કક્ષ** > **કય**; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૪. એક વર્તુળનો **અબ** વ્યાસ છે, અને તેને વર્તુળની બહારના **ક** બિંદુ સુધી વધાર્યો છે. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **મ** છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરોઃ—

(૧) **ક**થી પરિઘ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **કઅ** મોટી છે.

(૨) **ક**થી પરિઘ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **કબ** નાની છે.

(૩) **ક**માંથી **કક્ષ** અને **કય** પરિઘ સુધી દોરેલી છે, અને ∠**ક્ષમક** > ∠**યમક** છે; તો **કક્ષ** > **કય**; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૫. **અબક** સમબાજુ ત્રિકોણમાં **મ** એક બિંદુ છે. જો ∠**મઅબ** > ∠**મઅક** હોય, તો ∠**મકબ** > ∠**મબક** છે એ સિદ્ધ કરો.

૫૬. * સમબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધ્યાં હોય તો કઈ આકૃતિ થાય છે?

૫૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અંદરના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી જે કાટખુણ ચતુષ્કોણ થાય છે, તેના કર્ણો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને સમાંતર હોય છે અને તેમની બાદબાકીની બરાબર હોય છે.

૫૮. **અબકડ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના **અક** કર્ણમાં **પ** અને **વ** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે **અપ**=**કવ** છે; તો **બપડવ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવી આપો.

૫૯. **अब**ની એકજ બાજુએ **अबकड** અને **अबक्षय** આ બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો દોરેલા છે; તો બતાવો કે **कडयक्ष** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૬૦. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો **अक** કર્ણ **ई** સુધી એવી રીતે વધાર્યો છે, કે **कई = कअ** થાય છે. **ई**માંથી **कब**ને સમાંતર **ईफ** દોરેલી છે, અને તે વધારેલી **डक** લીટીને **फ**માં મળે છે; તો **अबफक** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૧. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની **अब, बक, कड, डअ** બાજુઓમાં અનુક્રમે **ई, फ, ग, ह** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે **अह = कफ** અને **अई = कग**; તો **ईफगह** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૨. * **अब** લીટીનું **क** મધ્યબિંદુ છે. **अ, ब, क**થી અનુક્રમે **अक्ष, बय, कज्ञ** લંબો આપેલી લીટી પર દોરેલા છે. જો **अ** અને **ब** આપેલી લીટીની એકજ બાજુએ હોય, તો બતાવો કે **अक्ष + बय = २ कज्ञ** છે.

૬૩. * ઉપલા પ્રશ્નમાં **अ** અને **ब** જો આપેલી લીટીની સામસામી દિશાએ હોય, તો **अक्ष - बय = २ कज्ञ** છે એમ બતાવો.

૬૪. **अबक** ત્રિકોણમાં **अ** ખુણાને દુભાગનારી લીટી, અને **बक**ને દુભાગનારો લંબ, એ એકમેકને **ड** બિંદુમાં છેદે છે; અને **ड**માંથી **अब** અને **अक** પર (જરૂર હોય તો એ બાજુઓને વધારીને) **डक्ष, डय** લંબો દોરેલા છે; તો **अक्ष = अय** અને **बक्ष = कय** એ સિદ્ધ કરો.

૬૫. **अबक** એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે અને **अब**માં **ड** એક ગમે તે બિંદુ છે. **अड** પર **क**થી વિરૂદ્ધ બાજુએ **अडई** સમબાજુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, તો **बई = कड** છે એમ બતાવો.

૬૬. **अबक** ત્રિકોણમાં **ब**માંથી **अक**ને મળનારી અને **क**માંથી **अब**ને મળનારી એવી બે લીટીઓ દોરી હોય, તો તે એક બીજીને દુભાગી શકતી નથી એમ બતાવો.

૬૭. **बक** પાયા પર **अबक** અને **डबक** ત્રિકોણો છે; અને **अड** ॥ **बक** છે. હવે **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેની પરિમિતિ **डबक** ત્રિકોણની પરિમિતિથી ઓછી છે એમ બતાવો.

૬૮. **अबकड** ચોરસ છે. અમાંથી **बक** અને **कड**નાં મધ્યબિંદુઓ સુધી, અને **क**માંથી **डअ** અને **अब**નાં મધ્યબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરેલી છે; તો તે લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો

૬૯ **अबक** ત્રિકોણના **अ** શિરોબિંદુમાંથી **बक** પાયા સુધી **अड**, **अई** લીટીઓ એવી દોરી છે, કે ∠ **बअड** = ∠ **क** અને ∠ **कअई** = ∠ **ब** થાય છે; તો **अ**માંથી **बक** પર દોરેલો લંબ **डई**ને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૦. **अबक** ત્રિકોણની **अब** બાજુના **ड** મધ્યબિંદુમાંથી **बक**ને સમાંતર **डई** દોરેલી છે, અને **अबक** ખુણાને **बई** દુભાગે છે; તો ∠ **अईब** કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૭૧. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેનો ખુણો **अ** અર્ધો કાટખુણો છે. અને **अ** અને **ब**માંથી સામી બાજુ પર દોરેલા **अड** અને **बई** લબો **फ**માં મળે છે, તો **फई** = **ईक** છે એમ બતાવો.

૭૨. **अड** લીટી **अबक** ત્રિકોણના **अ** આગળના બહારના ખુણાને દુભાગે છે. **क**માંથી **अड** પર દોરેલો લંબ **अड**ને **न**માં મળે છે. **बक**નું **म** મધ્યબિંદુ છે; તો **मन**=½ (**अब**+**अक**) છે એમ બતાવો.

૭૩. **अबकड** ચતુષ્કોણની **अब**, **डक** બાજુઓની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય, એવો એક ત્રિકોણ દોર્યો છે; અને તેજ ચતુષ્કોણની **अड**, **कब**ની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો તે ત્રિકોણોના પાયા સરખા છે એમ બતાવી આપો.

૭૪ **अबक** ત્રિકોણોના બહારના **अ** ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં ગમે ત્યાં **प** બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अब**+**अक** < **पब**+**पक**.

૭૫. **अबकडईफगह** નિયમિત અષ્ટકોણ છે, અને તેમાં **अफ**, **बई**, **कह**, **डग** લીટીઓ દોરી છે; તો તેમનાં છેદનબિંદુઓ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ બતાવો

૭૬. **अड** લીટી **अबक** ત્રિકોણના **अ** ખુણાને દુભાગે છે. **क**માંથી **अड** પર કાઢેલો લંબ **अड**ને **म**મા મળે છે, અને **बक**નું **म** મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવો કે **मन**=½ (**अब**−**अक**).

૭૭. **अबक** ત્રિકોણની **अब**, **अक** બાજુઓમાં અનુક્રમે **ड**, **ई** બિંદુઓ લીધાં છે; અને **बई**, **कड** લીટીઓ **फ**માં મળે છે; તો **डअ+अई>ईफ+ फड** એમ બતાવો.

૭૮. ચતુષ્કોણની સામસામી બે બાજુઓ અથવા પાસપાસેની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો બાકીની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સરખી બાજુઓની સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૭૯. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब = अक**. **बक**માં **ड** ગમે તે એક બિંદુ છે. **बड**, **डक**નાં મધ્યબિંદુઓથી **बक** પર દોરેલા લંબો **बअ**, **अक**ને અનુક્રમે **ह** અને **च**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **हब = अच** અને **अह = कच** છે.

૮૦. એક લીટીમાં **अ**, **ब**, **क**, બિંદુઓ હારબંધ એવાં લીધાં છે કે **अब=½ बक** **ब** મધ્યબિંદુ ધારી **½अब** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ કાઢ્યું છે. તેના પરિઘ પર **प** એક ગમે તે બિંદુ લીધું છે, અને **अ**, **प** બિંદુઓને સાંધનારી લીટી વધારીને **पद = अप** કરી છે. હવે **दब**, **दक** સાંધો અને ∠ **बदक** કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૮૧. **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુનું **ड** અને **अड**નું **ई** મધ્યબિંદુ છે. **बई** વધારવાથી તે **अक**ને **फ**માં મળે છે; તો **अफ=⅓अक** છે એમ બતાવો.

૮૨. **अबक** એક ત્રિકોણ છે. **बक**નું **ड** મધ્યબિંદુ છે, **अक**માં **फ** બિંદુ એવું લીધું છે કે **अफ=⅓अक** થાય છે. **अड**, **बफ** એક બીજાને **ई**માં છેદે છે; તો **अड**નું **ई** મધ્યબિંદુ છે, અને **ईफ=¼ बफ** છે એમ બતાવી આપો.

૮૩. એક ત્રિકોણમાં એવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેના કર્ણો ત્રિકોણમાં આપેલા બિંદુમાં એક બીજાને છેદે.

૮૪. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **प** બિંદુ ક્યાં લીધું હોય તો **पअ+पब+पक+पड**નો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થશે?

૮૫. ચતુષ્કોણ આકારના કાગળના ખુણા વાળવાથી તેમનાં શિરોબિંદુઓ એકજ બિંદુમાં મળે, અને કાગળ બધે ઠેકાણે બેવડો થાય, એટલા માટે કાગળનો આકાર કેવો હોવો જોઈએ?

૮૬. **अब** પાયો અને **अ**માંથી પડતો **बक** ઉપરનો લંબ આપેલા છે; તો **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૮૭. આપેલાં બે બિંદુઓમાંથી સરખે અંતરે હોય એવી, આપેલા એક ત્રીજા બિંદુમાંથી એક લીટી દોરો.

૮૭ (અ). એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે જે એક બીજીને છેદનારી બીજી બે લીટીઓની સાથે સરખા ખુણા કરે.

૮૮. જે ત્રિકોણની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરાબર હોય, અને આ બે બાજુઓ પૈકી એકની સામેનો ખુણો આપેલા ખુણા બરાબર હોય, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ કયારે બને છે ?

૮૯. **अबक** ત્રિકોણના **अ** શિરોબિંદુમાંથી **बक**ને સમાંતર **डअई** લીટી એવી દોરો કે **डई=बड+कई** થાય.

૯૦. **अबक** એક ત્રિકોણ છે, અને **अ**માંથી **बक**ને સમાંતર એક લીટી કાઢી છે, તો **ब**માંથી **अक**ને **प**માં મળે એવી અને ઉપલી સમાંતર લીટીને **फ**માં મળે એવી એક લીટી એવી દોરો કે **बप** લીટી **पफ**ના ડૂ બરાબર થાય.

૯૧. **कड** લીટીની એકજ બાજુએ **अ** અને **ब** બિંદુઓ છે. **कड**માં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) તે બિંદુથી **अ** અને **ब**નાં અંતરોની બાદબાકી ઓછામ ઓછી થાય; અને (૨) તે અંતરોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય.

૯૨. **अबक** એક આપેલો ત્રિકોણ છે, અને **डई**, **फग** આ આપેલી લીટીઓ એક બીજીને છેદે છે; તો **अबक** ત્રિકોણની સાથે એકરૂપ હોય એવો, અને જેની એક બાજુ **डई** પર પડે અને એક શિરોબિંદુ **फग** પર પડે એવો, ત્રિકોણ શી રીતે દોરવો તે બતાવો.

૯૩. **अबक** ત્રિકોણના **अ** શિરોબિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર **ब** અને **क**માંથી દોરેલા લંબો ૧ : ૨ આ પ્રમાણમાં હોય.

૯૪. ચાર બાજુઓ અને એક ખુણો આપ્યાં છે, તે ઉપરથી ચતુષ્કોણ દોરો.

૯૫. **अ** અને **ब** બિંદુઓ **कड** લીટીની (૧) સામસામી દિશાએ છે એમ ધારીને, અને (૨) એકજ બાજુએ છે એમ ધારીને, **कड**માં **प** બિંદુ એવું શોધી કાઢો, કે $\angle$**अपक** = $\angle$**बपड** થાય.

૯૬. પાયાની સામેનો ખુણો અને પાયાની પાસેનો એક ખુણો એ બેનો સરવાળો આપ્યો છે; તો આપેલા પાયા પર સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯૭. ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુને મળનારી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓમાંથી દોરેલા લંબો સરખા થાય.

૯૮. अबक ત્રિકોણની अब અને अक આ સરખી બાજુઓમાં क्ष અને य બિંદુઓ એવાં લો, કે बक्ष = क्षय = यक થાય.

૯૯. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી કાઢો, કે આપેલી બે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો તેનો ગાળો આપેલી લંબાઈનો થાય. એમ કરવું કયારે અશકય થાય છે?

૧૦૦. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવોઃ—

(૧) अ + ब, क, ∠अ.

(૨) ब − क, अ, ∠क.

(૩) क, ∠ब અને પરિમિતિ.

(૪) કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો અને પરિમિતિ.

(૫) ब + क अ, ∠अ.

(૬) ब − क, अ, ∠अ.

(૭) अ, क − ब, ∠क − ∠ब.

(૮) अ, क + ब, ∠क + ∠ब.

(૯) अ, ∠अ, ∠ब − ∠क.

(૧૦) अ = ૨″, ∠अ = ૪૦°, ∠ब − ∠क = ૨૦°.

(૧૧) अ + ब = ૩″, क = ૨·૬″, ∠क = ૧૨૦°.

(૧૨) अ = ૪″, क − ब = ૧·૪૫″, ∠अ = ૬૦°.

(૧૩) अ + ब = ૩·૭″, क = ·૭૫″, ∠अ = ૬૨°.

(૧૪) પરિમિતિ = ૫″, ∠अ = ૪૨°, ∠ब = ૩૬°.

(૧૫) क = ૨·૪″, ब − अ = ૧·૬″, ∠ब − ∠अ = ૬૫°.

(૧૬) ब = ૧·૧″, क + अ = ૩·૧″, ∠क − ∠अ = ૬૦°.

પરિશિષ્ટ બ.

પ્રશ્નો છોડવાની પૃથક્કરણ પદ્ધતિ.

જેમ શસ્ત્રનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય શસ્ત્ર હાથમાં હોય તોપણ તે ન હોય તેના જેવુંજ છે, તેમજ જ્ઞાનના સંબંધમાં પણ છે; એટલે કે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય જ્ઞાન હોય અથવા ન હોય તે સરખુંજ છે. માટે જે જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને આપવામાં આવ્યું હોય, તે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં તેમને શીખવવું જોઈએ. ભૂમિતિના વિષયમાં જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવો એટલે પ્રશ્ન છોડવા એજ છે. તેથી કરીને ભૂમિતિના વિષયમાંના જ્ઞાનનો છોકરાઓને ઉપયોગ કરતાં આવડે, એટલા માટે ભૂમિતિમાંના પ્રશ્ન છોડવાની શક્તિ છોકરાઓમાં ઉત્પન્ન કરવાની જરૂર છે.

તેમ છતાં પણ આ પ્રશ્નો શી રીતે છોડવા એ એક મોટી મુશ્કેલી છે. વિદ્યાર્થીઓને પહેલવહેલા પ્રશ્ન આપવામાં આવે, કે તેઓ ગભરાઈ જાય છે, અને પ્રશ્ન છોડવાની કોઈ પણ રીત તેમને ન આવડતી હોવાથી તેમનો એવો અભિપ્રાય છે, કે પ્રશ્નનો ઉત્તર આવડવો એ એક નસીબની વાત છે. પરતુ ખરી વાત એમ નથી. પ્રશ્ન છોડવામાં ફત્તેહમંદ ઉતરવા માટે સ્વાભાવિક બુદ્ધિ એક આવશ્યક બાબત છે; પણ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિની માહીતી અને મહાવરો એ બાબતો પણ તેટલીજ અગત્યની છે. માટે આ પદ્ધતિથી છોકરાઓને જાણીતા કર્યા હોય, અને તેમને પ્રશ્ન છોડવાની ટેવ પડે, તો તેઓ આ કામમાં ઘણા આગળ વધશે. આ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિ કઈ તે આગળ જણાવ્યું છે, તોપણ તે પદ્ધતિનું વર્ણન કરતાં પહેલાં એટલું કહેવું અવશ્યનું છે, કે બીજી કોઈ પણ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની યુક્તિ શોધી કાઢવાની આપણી હંમેશની જે પદ્ધતિ છે, તે પદ્ધતિનું અને આ પદ્ધતિનું તત્ત્વ એકજ છે. જ્યારે કોઈ બાબત આપણે સિદ્ધ કરવી હોય છે, ત્યારે તે સિદ્ધ કરવાની યુક્તિ ખોળતી વખતે આપણે સાધારણ રીતે જોતાં નીચે પ્રમાણે યત્ન કરીએ છીએ. પ્રથમ આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે એક ઇષ્ટ બાબત અ સિદ્ધ કરવા માટે તેનું સાધન બ આપણે પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ; અને બ મેળવવા માટે ક પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ. પરંતુ આમાંથી કોઈ પણ સાધન આપણને અનુકૂળ નથી એવું આપણને માલમ પડે છે, એટલે આ કારણોની

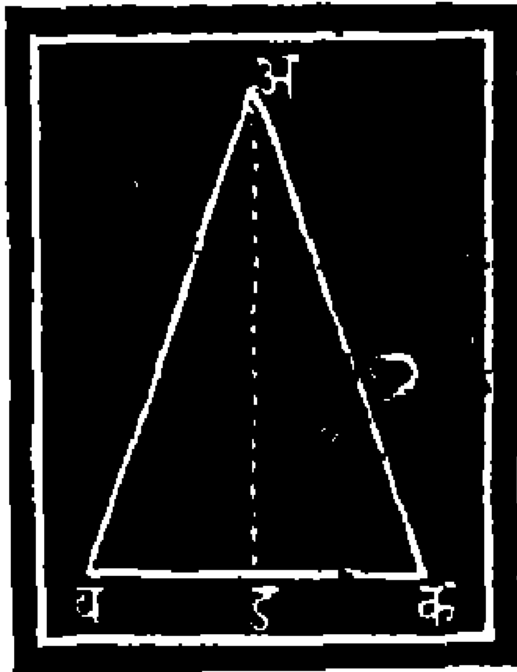
પરંપરાની વધારે શોધ કરવી જોઈએ એમ આપણને લાગે છે. એવી શોધ કરતાં કરતાં **क**નું સાધન **ड** છે, અને **ड**નું **क्ष** સાધન છે, અને **क्ष** આપણને અનુકૂળ છે, એમ જણાઈ આવે છે. પછી આપણે એવો વિચાર નક્કી કરીએ છીએ, કે **क्ष** આપણને અનુકૂળ છે, માટે **क्ष** પરથી **ड**, અને **ड** પરથી **क** અનુકૂળ કરી લેવું; અને **क** અનુકૂળ થયું એટલે તે પરથી **ब** અને **ब** પરથી **अ** સિદ્ધ કરી લેવું. દાખલા તરીકે, એકાદ નોકરી જોઈતી હોય, અને તે વગથી અથવા ભલામણથી મળવા જેવી હોય, તો આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે મને નોકરી આપવી **अ** અધિકારીના હાથમાં છે, તે અધિકારી પાસે **ब**નું વજન છે, **ब**, **क**નો સ્નેહી છે, પણ **क**ની સાથે અમારે કંઈ સ્નેહ નથી; માટે **क**ના સ્નેહીઓમાં અથવા સ્નેહીઓના સ્નેહીઓમાં આપણી ઓળખાણવાળો કોઈ છે કે નહિ એની તપાસ કરવી જોઈએ. એવી રીતે તપાસ કરતાં **क**ના સ્નેહીઓમાં આપણો ઓળખીતો માણસ જડયો, એટલે તેની મારફતે **क**ને મળી, **क**ની મદદથી **ब**ને અને **ब**ની મદદથી **अ**ને આપણે અનુકૂળ કરી લઈએ છીએ. એજ પદ્ધતિ (ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની) આપણી બીજી બધી યુક્તિઓમાં દેખાય છે; એટલે કે કોઈ પણ ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની આપણી હંમેશની રીત એવી હોય છે, કે તે વસ્તુ પ્રાપ્ત કરાવે એવાં સાધનોની પરંપરાની આપણે તપાસ કરતા જઈએ છીએ, અને તે સાધનોમાંનું એકાદ સાધન આપણા તાબામાંનું અથવા આપણું જાણીતું જણાયું, એટલે તે સાધન મારફતે આપણે ઇષ્ટ વસ્તુ મેળવીએ છીએ. એજ માર્ગ આપણે ભૂમિતિમાં સ્વીકારવો પડે છે. આ રીતનું પૃથક્કરણ કરીએ તો સાર નીચે પ્રમાણે જણાઈ આવે છે. જે બાબત સિદ્ધ કરવી છે, તે સિદ્ધ થઈ ગઈ છે, એવી કલ્પના કરીને તે સિદ્ધ કરવામાં કઈ બાબતો સાધનરૂપ છે, એની આપણે શોધ કરીએ છીએ; અને એવી શોધ કરતાં કરતાં ધારેલી વસ્તુ મેળવવામાં આધારભૂત હોય એવી આપણા તાબામાંની અથવા આપણી જાણીતી વાત જડી આવે છે, એટલે તેને આધારે આપણે ઇષ્ટવસ્તુ તરફ જઈએ છીએ. આ પ્રમાણે સાધ્ય વસ્તુ(નાં સાધનો)નું પ્રથમ પૃથક્કરણ અને પૃથક્કરણ કરી આધાર જડયો એટલે તે આધારે એકીકરણ, આ બે ક્રિયાઓ દરેક પ્રયત્નમાં આવશ્યક હોય છે. હવે એજ તત્ત્વ ભૂમિતિને લાગુ કરીએ, તો કોઈ પણ પ્રશ્ન છોડવાની રીત નીચે પ્રમાણે હોવી જોઈએ એમ જણાઈ આવશે.

જે સત્ય સાબીત કરવાનું હોય, અથવા જે રચના કરવાની હોય, તે સત્ય સિદ્ધ થયું છે, અથવા તે રચના બની ગઈ છે, એમ પ્રથમ ધારવું. પછી તે સિદ્ધ થવા માટે કઈ સાધનભૂત બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. તે બાબતો સમજાય, એટલે તે સિદ્ધ થવા માટે બીજી કઈ બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. એવો વિચાર કરતાં કરતાં, જે બાબત પ્રમેયના પક્ષ પરથી આપણા જાણવામાં હોય, તેની સાથે સાધનોની પરંપરાનો સંબંધ જોડવો. છેક પક્ષ સુધી ઉપલી સાધનપરંપરાનો સંબંધ નક્કી થયો, એટલે ઉલટો ક્રમ સ્વીકારી સિદ્ધ કરવું હોય તે સિદ્ધ કરવું.

પૃથક્કરણપદ્ધતિનાં ઉદાહરણ.

ઉદાહરણ ૧.

સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાના બે સરખા ભાગ કરે છે.



અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, અને તેના પાયાની સામેનો ખુણો દુભાગનારી લીટી **અડ** છે. તે **ડ** બિંદુમાં **બક**ના બે સરખા ભાગ કરે છે, એવું આપણે સિદ્ધ કરવું છે એમ ધારો.

પૃથક્કરણ.

બડ, ડકની બરાબર છે એમ ધારીએ, તો તે વાત સિદ્ધ થવા માટે પહેલાંનાં કયાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ ? બે લીટીઓ અરસપરસ સરખી છે એમ નક્કી થવા માટે (૧) તે બંને કોઈ ત્રીજી લીટીની બરાબર, અથવા તેના કોઈ અમુક અંશ, અથવા તેનાથી અમુકગણી હોવી જોઈએ; (૨) અથવા તે એકજ ત્રિકોણમાંના બે

સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ હોવી જોઈએ; (૩) અથવા બે એકરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓ હોવી જોઈએ......વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પનાને કોઈ આધાર જડતો નથી. બીજી કલ્પનાને પણ આધાર નથી. માત્ર ત્રીજી કલ્પનાને આધાર મળવાનો સંભવ લાગે છે. હવે આ કલ્પના ખરી ઠરવા માટે, એટલે △ अडब અને △ अडक એકરૂપ ઠરવા માટે, કઈ બાબતો ખાસ જરૂરની છે? બે ત્રિકોણ એકરૂપ કરવા માટે બંનેની ત્રણે બાજુએ અરસપરસ સરખી જોઈએ, અથવા બેની બબ્બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ સરખાં હોવાં જોઈએ, અથવા...... વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પના સંભવતી નથી; પણ બીજી કલ્પના તો વસ્તુસ્થિતિની સાથે પુરેપુરી મળતી આવે છે. કારણ કે પક્ષ પ્રમાણે अब अड બાજુઓ અને ∠ बअड અનુક્રમે अक, अड બાજુઓ અને ∠ कअडની બરાબર છે.

बड અને कड એક બીજાને બરાબર સિદ્ધ કરવા માટે જે પૂર્વ કારણો આવશ્યક હતાં, તેમની પરંપરા જોતાં તેમાંના એક પગથીઆનો સંબંધ પક્ષની સાથે મળતો આવે છે, એવું જણાઈ આવે છે; માટે આ પગથીઆની પાછળ પાછળ જઈએ. તો આપણે સિદ્ધ કરવાની બાબત પર જઈ પહોંચીએ એ ખુલ્લું છે.

એકીકરણ.

∵ बअड અને अकड ત્રિકોણોમાં—

बअ = कअ,

अड બંનેનાં સાધારણ;

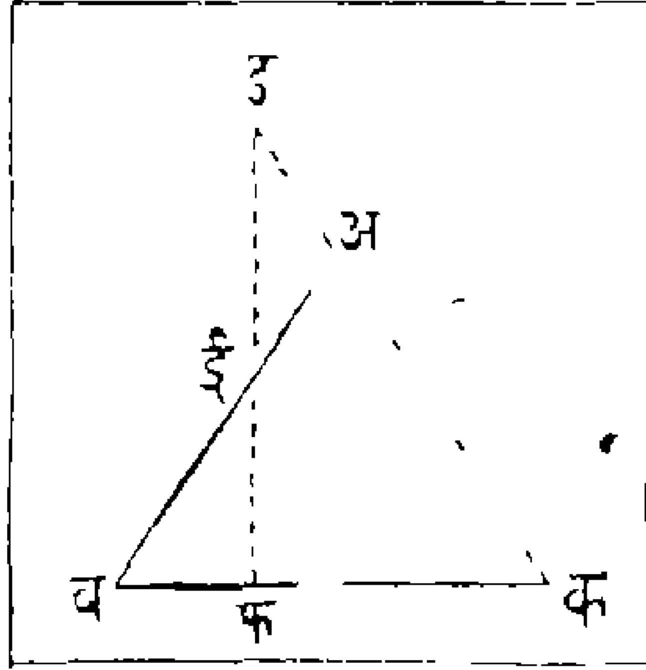
∠ बअड = ∠ कअड.

∴ △ बअड ≡ △ कअड.

∴ बड = कड.

ઉદાહરણ ૨.

अबक સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તેની कअ બાજુ ड સુધી વધારી છે; अबમાંથી अड જેટલો अई ભાગ કાપી કાઢયો છે; बकને फ બિંદુમાં મળતાં સુધી डईને વધારી છે; તો ∠ डफक એક કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ કરો.



પૃથક્કરણ.

$\angle$ **डफक** કાટખુણો છે એમ ધારો. તેમ ધારીએ તો—

$\angle$ **डफक** $=\angle$ **फडक** $+\angle$ **डकफ** (પ્ર. ૮)

પણ $\angle$ **डफक** $=\angle$ **फवई** $+\angle$ **वईफ**; (પ્ર. ૮, ઉ. ૩)

$\therefore$ $\angle$ **फडक** $+\angle$ **डकफ** $=\angle$ **फवई** $+\angle$ **वईफ** $(=\angle$ **अईड**).

પણ $\angle$ **डकफ** $=\angle$ **फवई**,

$\therefore$ ઉપલા સમીકરણમાંથી આ ખુણા લઈ લીધા હોય તો—

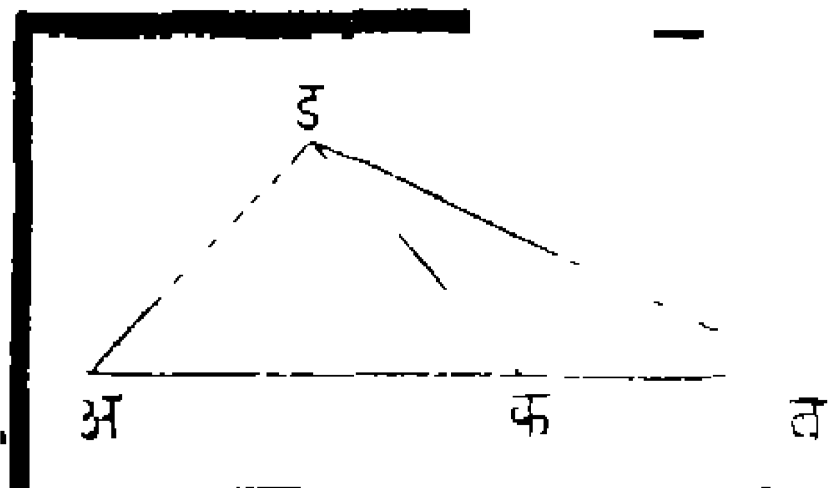
શેષ $\angle$ **फडक** $=$ શેષ $\angle$ **अईड**.

હવે $\angle$ **फडक** $=\angle$ **अईड** એ પક્ષ છે; માટે અહીંથી ઉલટા ક્રમે જવાથી $\angle$ **डफक** કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ થશે.

એકીકરણ (૨૫૯ છે.)

ઉદાહરણ ૩.

આપેલી લીટીના એવા બે ભાગ કરવા, કે તેમાંના એક પરનો ચોરસ બીજા પરના ચોરસથી બમણો થાય.



પૃથક્કરણ.

अब આપેલી લીટી છે. ધારો કે તેના क બિંદુમાં માગ્યા પ્રમાણે ભાગ થયા છે.

હવે જો $अक^2 = २\,बक^2$ હોય, તો अक જેનો કર્ણ હોય એવા સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણની એક બાજુના વર્ગની બરાબર बकનો વર્ગ હોવો જોઈએ.

એવો अकड ત્રિકોણ કાઢો, એટલે કે ∠अकड, ∠कअड, દરેક ૪૫°નો કરો.

∵ $कड^2 = कब^2$,
∴ कड = कब.
∴ ∠बडक = ∠कबड.
∵ अड = कड,
∴ ∠डअक = ∠डकअ = $\frac{1}{2}$ કાટખુણો.
(કારણ કે ∠अडक = ૧ કાટખુણો.) (રચના)
∴ ∠डकब બહારનો ખુણો = ૧$\frac{1}{2}$ કાટખુણો. (પ્ર. ૧)
∴ ∠कडब + ∠कबड = $\frac{1}{2}$ કાટખુણો. (પ્ર ૮)
∴ ∠कबड = $\frac{1}{4}$ કાટખુણો, અને ∠कडब = $\frac{1}{4}$ કાટખુણો.

હવે अबड ત્રિકોણના ∠बअड અને ∠अबड આપણે જાણીએ છીએ, અને डकब ત્રિકોણના પણ બધા ખુણા જાણીએ છીએ. તેથી આ ત્રિકોણો કાઢી શકાશે; અર્થાત્ क બિંદુનું સ્થળ પણ કાઢી શકાશે.

એકીકરણ.

∠बअड $\frac{1}{2}$ કાટખુણા બરાબર કરો.
∠अबड $\frac{1}{4}$ કાટખુણા બરાબર કરો.
∠बडक $\frac{1}{4}$ કાટખુણા બરાબર કરો.
क ઇષ્ટ બિંદુ છે.

ક્રમવિરૂદ્ધ સિદ્ધતા.

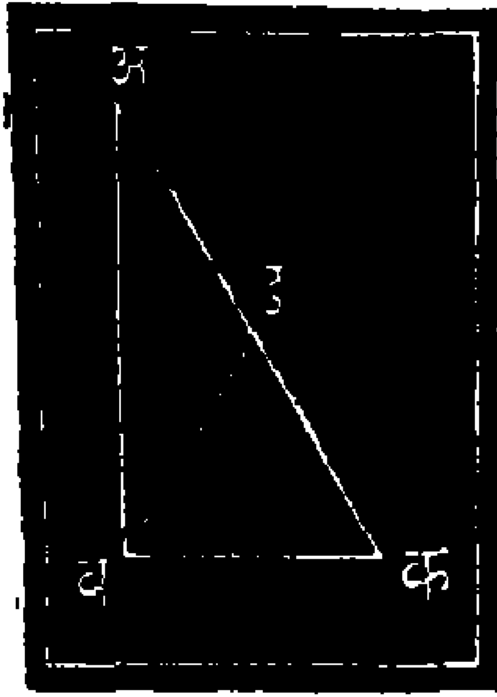
કોઈ કોઈ વખતે સાધ્ય સિદ્ધ કરવા માટે કયાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ એનો વિચાર કરવા કરતાં, સાધ્ય ખોટું છે એમ ધારવાથી કંઈ અસંભવિત બાબતો અથવા પક્ષની વિરૂદ્ધ બાબતો

ઉત્પન્ન થાય છે, તેનો વિચાર કરીને, સાધ્ય સિવાય બીજી દરેક કલ્પના પક્ષને વિરુદ્ધ હોવાથી સાધ્ય સિવાય બીજી કોઈ પણ બાબત સંભવતી નથી, એવી સિદ્ધતા આપવી વધારે સહેલી પડે છે.

તેમ છતાં, જ્યાં સાધ્યને ફક્ત એક કે બે વિકલ્પ હોય છે ત્યાંજ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો સગવડભરેલો હોય છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ.

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે.



પક્ષ—**अबक** કાટખુણ ત્રિકોણ છે. **ड**, **अक**નું મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય—**बड** = **अड** = **डक**.

સિદ્ધતા—**कड** અથવા **अड**ની બરાબર **बड** ન હોય, તો તેનાથી નાની કે મોટી હોવી જોઈએ. એ સિવાય ત્રીજી સ્થિતિ સંભવતી નથી.

તે નાની હોય તો—

∠ **बअड** < ∠ **अबड** થાય,

અને ∠ **बकड** < ∠ **कबड** થાય,

એટલે (∠ **बअड** + ∠ **बकड**) < ∠ **अबक** થાય,

અને મોટી હોય તો—

(∠ **बअक** + ∠ **बकअ**) > ∠ **अबक** થાય;

પણ એમાંની એક પણ બાબત શક્ય નથી;

કારણ કે ∠ **अबक** = ૧ કાટખુણો છે; અર્થાત્ ∠ **बअक** + ∠ **बकअ** = ∠ **अबक** છે.

માટે **बड**, **अड**થી નાની પણ નથી, અને મોટી પણ નથી; એટલે બંને સરખી છે.

ઉત્તરો.

(નીચે આપેલા કેટલાક ઉત્તરો ખરા ઉત્તરોની લગભગંના છે. વિદ્યાર્થીએ માપણી કરીને આપવાના ઉત્તરોમાં $\frac{1}{10}$ ઇંચ જેટલી અથવા એકાદ અંશ જેટલી ચૂક હોય તો તે ગણવા જેવી નથી.

પૃષ્ઠ ૧૩–૧૫.

પ્ર. ૧. ૧·૬″; ૪૦ મિ. મી,
પ્ર. ૪. પહેલી લીટી = ૪૦ મિ. મી; ૧·૬″
બીજી લીટી = ૪૯ મિ. મી; ૧·૯૫″
પ્ર. ૫. अक = ·૮″; कब = ·૪″; अब = ૧·૨″.
પ્ર. ૬. अक=·૬″; कड=·૪″; डब=·૩″; अब=૧·૩″.
પ્ર. ૭. अब = ૧·૭૫″; अक = ·૮૫″; कब = ·૯″.

પૃષ્ઠ ૧૮–૨૦.

પ્ર. ૨. પહેલું વૃક્ષ = ૩′. ૨″; બીજું વૃક્ષ = ૨′ ૧$\frac{1}{2}$″; ત્રીજું વૃક્ષ = ૨′, ૭″.
પ્ર. ૩. ૭૦૦ ફુટ.
પ્ર. ૧૧. ૧૦′ પ્ર. ૧૨. ૪૧′ પ્ર. ૧૩. ૩૭·૨′.
પ્ર. ૧૪. ૯·૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૫. ૭·૨ માઇલ.
પ્ર. ૧૬. ૧૩·૩૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૭. ૩·૭૫ માઇલ.
પ્ર. ૧૮. ૨૮૨·૮′

પૃષ્ઠ ૪૨–૪૪.

પ્ર. ૧. પૂર્વની ઉત્તરે ૬૦°; ઉત્તરની પશ્ચિમે ૩૦°.
પ્ર. ૨. વાયવ્ય ખુણો.
પ્ર. ૩. પશ્ચિમની ઉત્તરે ૨૬°.
પ્ર. ૪. ૫·૧૨૫ માઇલ; પશ્ચિમની દક્ષિણે ૬૧°.
પ્ર. ૫. ૬$\frac{1}{4}$ માઇલ; પૂર્વની ઉત્તરે ૨૫°.
પ્ર. ૬. ૨૮·૭૫ માઇલ; દક્ષિણની પશ્ચિમે ૯°.
પ્ર. ૭. દક્ષિણની પૂર્વે ૩૬°; ૩·૨૫ માઇલ.
પ્ર. ૮. ૪·૦૬૨૫ માઇલ.
પ્ર. ૯. લગભગ ૧૨૨૫ ફુટ.
પ્ર. ૧૦. ૬ સેં. મી. પ્ર. ૧૧. ૫૭$\frac{1}{2}$ હાથ.

[સમાપ્ત.]